Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Направление подготовки/специальность: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Наименование образовательной программы: Математическое моделирование

Уровень образования: высшее образование - бакалавриат

Форма обучения: Очная

Оценочные материалы по дисциплине Теория функций и функциональный анализ

Москва
2022

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Преподаватель	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» Сведения о владельце ЦЭП МЭИ Владелец: Амосов А.А. Идентификатор: R9a3a6370-AmosovAA-723724c4	А.А. Амосов
(должность)	(подпись)	(расшифровка подписи)

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель образовательной программы	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» Сведения о владельце ЦЭП МЭИ Владелец: Черепова М.Ф. Идентификатор: R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1	М.Ф. Черепова
(должность, ученая степень, ученое звание)	(подпись)	(расшифровка подписи)
Заведующий выпускающей кафедры	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» Сведения о владельце ЦЭП МЭИ Владелец: Зубков П.В. Идентификатор: R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c	П.В. Зубков
(должность, ученая степень, ученое звание)	(подпись)	(расшифровка подписи)

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки: достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. ПК-2 Способен участвовать в компьютерной реализации математических моделей
   ИД-1 Демонстрирует знание терминологии, базовых результатов и методов фундаментальной математики
   ИД-3 Использует базовые знания и методы фундаментальной математики для анализа простейших свойств математических моделей

и включает:

для текущего контроля успеваемости:

<u>Форма реализации: </u>Письменная работа

1. Интеграл Лебега (Контрольная работа)
2. Мера Лебега и измеримые функции (Контрольная работа)
3. Элементы теории метрических пространств (Контрольная работа)
4. Элементы теории множеств (Контрольная работа)

БРС дисциплины

5 семестр

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %				
	Индекс КМ:	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4
	Срок КМ:	4	8	12	15
Элементы теории множеств					
Элементы теории множеств		+			
Элементы теории метрических пространств					
Элементы теории метрических пространств			+		
Мера Лебега и измеримые функции					
Мера Лебега и измеримые функции				+	
Интеграл Лебега					
Интеграл Лебега					+
	Вес КМ:	25	25	25	25

$Общая часть/Для промежуточной аттестации$

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Индекс компетенции	Индикатор	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Контрольная точка
ПК-2	ИД-1$_{ПК-2}$ Демонстрирует знание терминологии, базовых результатов и методов фундаментальной математики	Знать: терминологию и базовые результаты теории множеств терминологию и основные результаты теории меры и теории измеримых функций	Элементы теории множеств (Контрольная работа) Мера Лебега и измеримые функции (Контрольная работа)
ПК-2	ИД-3$_{ПК-2}$ Использует базовые знания и методы фундаментальной математики для анализа простейших свойств математических моделей	Уметь: исследовать простейшие свойства подмножеств метрических пространств и применять принцип сжимающих отображений анализировать свойства измеримости множеств и функций, интегрируемости функций по Лебегу и применять базовые результаты теории интеграла Лебега	Элементы теории метрических пространств (Контрольная работа) Интеграл Лебега (Контрольная работа)

II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания

КМ-1. Элементы теории множеств

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 25
Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 45 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет знание студентом элементарных операций над множествами и их свойств, основных фактов об отображениях множеств, операций над бесконечными семействами множеств и их свойств, а также основ теории мощностей.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: терминологию и базовые результаты теории множеств	1.Элементарные операции над множествами и их свойства. 2.Отношения и отображения. Образы и прообразы. 3.Операции над бесконечными семействами множеств и их свойства. 4.Мощность множества. Арифметика кардинальных чисел.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

КМ-2. Элементы теории метрических пространств

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 25
Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:

Задача 1 проверяет умение студентом применять базовые понятия теории метрических пространств: метрики, эквивалентность и топологическая эквивалентность метрик, полные метрические пространства. Задача 2 проверяет умение студентом оперировать основными топологическими понятиями в метрических пространствах: открытые и замкнутые множества; предельные, граничные, внутренние и другие типы точек множества в метрическом пространстве. Задача 3 проверяет умение студентом применять принцип сжимающих отображений. Задача 4 проверяет умение студентом применять основные факты о компактных множествах в метрических пространствах.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: исследовать простейшие свойства подмножеств метрических пространств и применять принцип сжимающих отображений	1.Базовые понятия теории метрических пространств и их применение. 2.Основные топологические понятия в метрических пространствах и их применение. 3.Применение принципа сжимающих отображений. 4.Компактные множества и их простейшие свойства.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

КМ-3. Мера Лебега и измеримые функции

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 25
Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 45 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет знание студентом основных понятий и фактов теории меры Лебега и измеримых функций в $\mathbb{R}^d$.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: терминологию и основные результаты теории меры и теории измеримых функций	1.Измеримые по Лебегу множества и их свойства. 2.Мера Лебега и её свойства. 3.Измеримые функции и их свойства. 4.Операции над измеримыми функциями.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

КМ-4. Интеграл Лебега

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 25
Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:
Контрольная работа проверяет умение студентом применять теорию измеримых по Лебегу множеств и функций, исследовать функциональные последовательности на сходимости почти всюду и по мере, анализировать свойство интегрируемости функций по Лебегу и применять базовые результаты теории интеграла Лебега.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: анализировать свойства измеримости множеств и функций, интегрируемости функций по Лебегу и применять базовые результаты теории интеграла Лебега	1.Исследование на сходимость последовательности измеримых функций по мере и почти всюду. 2.Исследование интегрируемости функции по Лебегу. 3.Свойства интегрируемых по Лебегу функций и их применение. 4.Применение теорем о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

5 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

1. Обобщённый принцип сжимающих отображений. Неоднородное линейное интегральное уравнение Вольтерры.
2. Измеримые множества. Измеримость открытых множеств. Множества меры нуль и множества полной меры. Измеримость не более чем счётного объединения измеримых множеств.

Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса из программы экзамена. На подготовку к ответу студенту даётся 60 минут. Во время ответа студенту могут быть заданы дополнительные вопросы по программе экзамена.

I. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины

1. Компетенция/Индикатор: ИД-1$_{\text{ПК-2}}$ Демонстрирует знание терминологии, базовых результатов и методов фундаментальной математики

Вопросы, задания

1.Элементарные операции над множествами и их свойства.
2.Измеримые множества. Измеримость открытых множеств. Множества меры нуль и множества полной меры. Измеримость не более чем счётного объединения измеримых множеств.
3.Измеримость замкнутых множеств. Измеримость дополнения измеримого множества.
4.Кольца, алгебры и σ-алгебры множеств. Лебеговская σ-алгебра всех измеримых подмножеств $\mathbb{R}^d$.
5.Критерий измеримости Валле-Пуссена. Критерий измеримости в терминах множеств типа F_σ и G_δ.
6.Счётная аддитивность меры. Теорема о пределе мер монотонной последовательности измеримых множеств.
7.Пример Витали неизмеримого множества. Внешняя мера не является аддитивной функцией множеств.
8.Измеримые функции и их простейшие свойства.
9.Измеримость суммы, разности, произведения и частного двух измеримых функций. Измеримость почти всюду непрерывных функций.
10.Функция Кантора и её свойства. Образ и прообраз измеримого множества при измеримом отображении. Композиция измеримых функций.
11.Борелевская σ-алгебра. Измеримость прообраза борелевского множества при измеримом отображении. Измеримость композиции измеримой функции с непрерывной.
12.Внешняя мера множества и её свойства.
13.Мера открытого множества и её свойства.
14.Отношения и функции. Отображения. Образы и прообразы множеств при данном отображении и их свойства.

15.Инъекции, сюръекции и биекции. Композиция отображений. Левые обратные, правые обратные и обратные отображения.
16.Операции над семействами множеств и их свойства.
17.Отношения эквивалентности. Разбиения множества. Фактор-множество. Примеры.
18.Кардинальные числа и их сравнение. Теорема Шрёдера–Кантора–Бернштейна.
19.Теорема Кантора. Операции над кардинальными числами и их свойства.
20.Счётные множества и их свойства. Примеры.
21.Множества мощности континуума и их свойства. Примеры.
22.Мера полуоткрытого прямоугольного параллелепипеда и её свойства.

Материалы для проверки остаточных знаний

1.____________ множеств **A** и **B** называется множество, содержащее все элементы множеств **A** и **B** и только их.

Ответы:

Впишите нужное слово.

Верный ответ: объединение/сумма

2.Пусть на плоскости задана некоторая прямая **L**. Является ли на множестве точек плоскости отношением эквивалентности следующее отношение: точка **A** находится в этом отношении к точке **B**, если вектор **AB** коллинеарен прямой **L**?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

3.Множество называется счётным, если оно равномощно

Ответы:

а) множеству всех действительных чисел R; б) множеству всех натуральных чисел N; в) множеству всех комплексных чисел C; г) множеству {1, 2, ..., n} для некоторого натурального n∈ N; д) множеству всех рациональных чисел Q

Верный ответ: б, д

4.Чему равна мера Лебега множества всех рациональных чисел **Q**?

Ответы:

а) 1; б) 0; в) ∞

Верный ответ: б

5.Верно ли, что любая непрерывная на отрезке [a,b] функция измерима по Лебегу?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

2. Компетенция/Индикатор: ИД-3$_{ПК-2}$ Использует базовые знания и методы фундаментальной математики для анализа простейших свойств математических моделей

Вопросы, задания

1.Последовательности измеримых функций. Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Сходимость по мере. Почти единственность предела сходящейся по мере последовательности измеримых функций.
2.Арифметические свойства пределов сходящихся по мере последовательностей измеримых функций.
3.Связь сходимостей почти всюду и по мере (теоремы Лебега и Рисса). Теорема Егорова.
4.Следствия теоремы Бореля. Теорема Лузина.
5.Конечные измеримые разбиения ограниченного измеримого множества. Верхние и нижние интегральные суммы Лебега ограниченной измеримой функции и их свойства. Интеграл Лебега по ограниченному измеримому множеству от ограниченной измеримой функции.

6.Арифметические свойства интеграла Лебега по ограниченному измеримому множеству от ограниченной измеримой функции и аддитивность по множеству интегрирования.
7.Инвариантность относительно сдвига и интегрирование неравенств для интеграла Лебега по ограниченному измеримому множеству от ограниченной измеримой функции. Теорема Лебега.
8.Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману и его следствия.
9.Интеграл Лебега по ограниченному измеримому множеству от неотрицательной измеримой функции и его свойства.
10.Суммируемые функции произвольного знака на ограниченном измеримом множестве и их свойства.
11.Интеграл Лебега на неограниченном измеримом множестве и его свойства.
12.Абсолютная непрерывность и счётная аддитивность интеграла Лебега.
13.Сходимость в среднем последовательности суммируемых функций. Почти единственность предела. Неравенство Чебышёва и его следствия.
14.Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Теорема Леви и её следствие.
15.Теорема Фату и её следствия. Связь между различными типами сходимости суммируемых функций.
16.Теорема Бореля.
17.Теорема о сечениях измеримого множества.
18.Лемма Гейне–Бореля в $\mathbb{R}^d$.
19.Метрические пространства и их подпространства. Примеры. Расстояние между подмножествами, диаметр множества, ограниченные множества.
20.Предел последовательности в метрическом пространстве. Ограниченные и фундаментальные последовательности.
21.Полные метрические пространства. Примеры. Сходимость фундаментальной последовательности, обладающей точкой сгущения.
22.Открытый шар в метрическом пространстве. Открытые множества и их свойства. Окрестности.
23.Внутренняя точка множества. Внутренность множества и её свойства.
24.Замкнутые множества и их свойства. Замкнутый шар и сфера в метрическом пространстве.
25.Точка прикосновения множества. Замыкание множества и его свойства.
26.Задача о наилучшем приближении. Теорема отделимости замкнутых множеств.
27.Граница множества и её свойства. Граничные множества.
28.Предельные и изолированные точки множества. Производное множество и его свойства. Плотные в себе, совершенные и дискретные множества.
29.Строение открытых и замкнутых множеств на действительной прямой.
30.Совершенные множества на действительной прямой. Канторово множество.
31.Предел функции в метрических пространствах. Критерий Коши.
32.Непрерывные отображения в метрических пространствах. Гомеоморфизмы.
33.Липшицевы отображения. Сжимающие отображения. Принцип сжимающих отображений. Неоднородное линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода.
34.Обобщённый принцип сжимающих отображений. Неоднородное линейное интегральное уравнение Вольтерры.
35.Компактные и относительно компактные множества в метрическом пространстве и некоторые их простейшие свойства.
36.Топология метрического пространства. Эквивалентные и топологически эквивалентные метрики.
37.Теорема Фубини.

Материалы для проверки остаточных знаний

1.Метрическое пространство называется *полным*, если

Ответы:

а) любая последовательность элементов этого пространства сходится; б) любая фундаментальная последовательность элементов этого пространства сходится; в) любая сходящаяся последовательность элементов этого пространства фундаментальна; г) любая последовательность элементов этого пространства фундаментальна

Верный ответ: б

2.Пусть $\langle \mathbf{X},\rho \rangle$ — метрическое пространство. Отображение $f:\mathbf{X}\to\mathbf{X}$ называется *сжимающим*, если

Ответы:

а) $\rho(f(x),f(y))\le\rho(x,y)$ для любых точек $x,y\in X$; б) $\rho(f(x),f(y))<\rho(x,y)$ для любых точек $x,y\in X$; в) существует число $0\le\alpha\le1$ такое, что $\rho(f(x),f(y))\le\alpha\cdot\ \rho(x,y)$ для любых точек $x,y\in X$; г) существует число $\alpha>1$ такое, что $\rho(f(x),f(y))\le\alpha\cdot\ \rho(x,y)$ для любых точек $x,y\in X$; д) существует число $0\le\alpha<1$ такое, что $\rho(f(x),f(y))\le\alpha\cdot\ \rho(x,y)$ для любых точек $x,y\in X$

Верный ответ: д

3.Подмножество метрического пространства называется *компактным*, если всякая последовательность его элементов

Ответы:

а) сходится к некоторому элементу этого метрического пространства; б) сходится к некоторому элементу этого подмножества; в) содержит подпоследовательность, которая сходится к некоторому элементу этого подмножества; г) содержит подпоследовательность, которая сходится к некоторому элементу этого метрического пространства

Верный ответ: в

4.Упорядочите виды сходимости функциональных последовательностей на отрезке [a,b] в порядке убывания силы (т.е. на первом месте должна быть сходимость, из которой следует любая другая из представленных).

Ответы:

а) сходимость по мере Лебега на отрезке [a,b]; б) равномерная сходимость на отрезке [a,b]; в) сходимость почти всюду относительно меры Лебега на отрезке [a,b]; г) сходимость в каждой точке отрезка [a,b]

Верный ответ: б, г, в, а

5.Выберите истинное высказывание.

Ответы:

а) Любая интегрируемая по Лебегу на отрезке [a,b] функция интегрируема на этом отрезке и по Риману. б) Любая интегрируемая по Риману на отрезке [a,b] функция интегрируема на этом отрезке и по Лебегу. в) Множества интегрируемых на отрезке [a,b] функций по Лебегу и по Риману совпадают.

Верный ответ: б

6.Верно ли, что только ограниченные функции могут быть интегрируемыми по Лебегу?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

7.Следует ли из сходимости почти всюду последовательности суммируемых функций сходимость в среднем?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» ставится, если студент обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание материалов дисциплины, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, даёт полный исчерпывающий ответ, как на основные вопросы билета, так и на дополнительные вопросы экзаменатора.

Оценка: 4
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» ставится, если студент обнаруживает полное знание материалов дисциплины, успешно выполняет предусмотренные программой задания; в ответе имеют место несущественные неточности, которые студент способен исправить самостоятельно, благодаря наводящему вопросу.

Оценка: 3
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает знание материалов дисциплины в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляется с выполнением заданий, предусмотренных программой; в ответе на основные вопросы билета и/или дополнительные вопросы экзаменатора имеются существенные неточности, но студент обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством экзаменатора.

III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих.