Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Направление подготовки/специальность: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Наименование образовательной программы: Математическое моделирование

Уровень образования: высшее образование - бакалавриат

Форма обучения: Очная

Оценочные материалы по дисциплине Функциональный анализ

Москва
2022

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Преподаватель	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» Сведения о владельце ЦЭП МЭИ Владелец: Амосов А.А. Идентификатор: R9a3a6370-AmosovAA-723724c4	А.А. Амосов
(должность)	(подпись)	(расшифровка подписи)

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель образовательной программы	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» Сведения о владельце ЦЭП МЭИ Владелец: Черепова М.Ф. Идентификатор: R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1	М.Ф. Черепова
(должность, ученая степень, ученое звание)	(подпись)	(расшифровка подписи)
Заведующий выпускающей кафедры	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» Сведения о владельце ЦЭП МЭИ Владелец: Зубков П.В. Идентификатор: R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c	П.В. Зубков
(должность, ученая степень, ученое звание)	(подпись)	(расшифровка подписи)

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки: достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. ПК-2 Способен участвовать в компьютерной реализации математических моделей
   ИД-1 Демонстрирует знание терминологии, базовых результатов и методов фундаментальной математики
   ИД-3 Использует базовые знания и методы фундаментальной математики для анализа простейших свойств математических моделей

и включает:

для текущего контроля успеваемости:

Форма реализации: Письменная работа
1. Линейные пространства (Контрольная работа)
2. Метрические пространства (Контрольная работа)
3. Нормированные пространства (Контрольная работа)
4. Преобразование Фурье (Контрольная работа)
5. Пространства Лебега (Контрольная работа)
6. Пространства со скалярным умножением (Контрольная работа)
7. Теория операторов I (Контрольная работа)
8. Теория операторов II (Контрольная работа)

БРС дисциплины

6 семестр

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %				
	Индекс КМ:	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4
	Срок КМ:	4	8	12	15
Пространства Лебега					
Пространства Лебега		+			
Метрические пространства					
Метрические пространства			+		
Линейные пространства					
Линейные пространства				+	
Нормированные пространства					

Нормированные пространства				+
Вес КМ:	25	25	30	20

7 семестр

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %				
	Индекс КМ:	КМ-5	КМ-6	КМ-7	КМ-8
	Срок КМ:	4	8	12	15
Пространства со скалярным умножением					
Пространства со скалярным умножением		+			
Линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах					
Линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах			+	+	
Преобразование Фурье					
Преобразование Фурье					+
Вес КМ:		25	25	25	25

$Общая часть/Для промежуточной аттестации$

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Индекс компетенции	Индикатор	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Контрольная точка
ПК-2	ИД-1ПК-2 Демонстрирует знание терминологии, базовых результатов и методов фундаментальной математики	Знать: терминологию и основные результаты теории линейных пространств терминологию и основные результаты теории линейных операторов и функционалов в нормированных пространствах терминологию и основные результаты теории нормированных пространств терминологию и базовые результаты теории пространств Лебега	Пространства Лебега (Контрольная работа) Линейные пространства (Контрольная работа) Нормированные пространства (Контрольная работа) Теория операторов I (Контрольная работа)
ПК-2	ИД-3ПК-2 Использует базовые знания и методы фундаментальной математики для анализа простейших свойств математических моделей	Уметь: применять теорию пространств со скалярным умножением исследовать свойства уравнений Фредгольма первого и второго рода, а также анализировать	Метрические пространства (Контрольная работа) Пространства со скалярным умножением (Контрольная работа) Теория операторов II (Контрольная работа) Преобразование Фурье (Контрольная работа)

		свойства спектра линейного оператор применять преобразование Фурье анализировать базовые свойства метрических пространств	

II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания

6 семестр

КМ-1. Пространства Лебега

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 25
Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:
Контрольная работа проверяет знание студентом базовых понятий и фактов теории пространств Лебега.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: терминологию и базовые результаты теории пространств Лебега	1.Пространства Лебега L_p ($1\leq p<\infty$) и их свойства. 2.Сходимость в среднем порядка p и другие виды сходимостей функциональных последовательностей. Неравенство Гёльдера. 3.Существенно ограниченные функции и пространство L_∞. 4.Свёртка и её свойства. Усреднение функций из пространств Лебега.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

КМ-2. Метрические пространства

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 25
Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет умение студентом применять основные понятия и факты теории метрических пространств.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: анализировать базовые свойства метрических пространств	1.Плотность одного множества в другом. Сепарабельность метрического пространства. 2.Полнота метрического пространства. Нигде не плотные множества. Множества первой и второй категорий Бэра. 3.Компактность метрического пространства. Вполне ограниченные множества. 4.Отображения метрических пространств и свойства сепарабельности, полноты и компактности.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

КМ-3. Линейные пространства

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 30
Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:
Контрольная работа проверяет знание студентом основных понятий и фактов общей теории (бесконечномерных) векторных пространств.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: терминологию и основные результаты теории линейных пространств	1.Векторные пространства. Подпространства. Алгебраические операции над подмножествами векторного пространства. Аффинные многообразия. 2.Базисы Гамеля. Размерность векторного пространства. 3.Линейные отображения векторных пространств. Изоморфизмы. 4.Выпуклые множества и однородно-выпуклые функционалы.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

КМ-4. Нормированные пространства

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 20
Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 3 задачи. Для написания работы студенту даётся 45 минут.

Краткое содержание задания:
Контрольная работа проверяет знание студентом базовых понятий и фактов теории нормированных пространств.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: терминологию и основные результаты теории нормированных пространств	1.Нормированные пространства. Эквивалентные нормы. Сходящиеся последовательности. 2.Тотальные семейства векторов в нормированных пространствах. Базисы Шаудера. 3.Банаховы пространства и их свойства.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 3 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена 1 из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

7 семестр

КМ-5. Пространства со скалярным умножением

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 25

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет умение студентом применять основные понятия и факты теории пространств со скалярным умножением.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: применять теорию пространств со скалярным умножением	1.Скалярное умножение. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Тождество параллелограмма. 2.Угол между векторами пространства со скалярным умножением. Ортогональные системы. 3.Гильбертовы пространства. Задача о наилучшем приближении. Ортогональное дополнение. 4.Коэффициенты Фурье. Ортонормированные базисы.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

КМ-6. Теория операторов I

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 25
Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет знание студентом базовых понятий и фактов теории линейных операторов в нормированных пространствах.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: терминологию и основные результаты теории линейных операторов и функционалов в нормированных пространствах	1.Непрерывность линейного оператора в нормированных пространствах и ей эквивалентные свойства. Норма линейного непрерывного оператора. 2.Обратный оператор. 3.Линейные непрерывные функционалы на нормированных пространствах. Теорема Хана–Банаха. 4.Сопряжённое пространство.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

КМ-7. Теория операторов II

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 25
Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:
Контрольная работа проверяет умение студентом оперировать основными понятиями и фактами теории линейных операторов в нормированных пространствах.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: исследовать свойства уравнений Фредгольма первого и второго рода, а также анализировать свойства спектра линейного оператор	1.Слабая и *-слабая сходимости. Слабая полнота. Слабая компактность. 2.Сопряжённый оператор. 3.Компактные линейные операторы. Теория Фредгольма. 4.Спектр линейного оператора.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3
Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

КМ-8. Преобразование Фурье

Формы реализации: Письменная работа
Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа
Вес контрольного мероприятия в БРС: 25

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 3 задачи. Для написания работы студенту даётся 45 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет знание студентом базовых понятий и фактов теории преобразования Фурье.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: применять преобразование Фурье	1.Преобразование Фурье функций из L_1(R). 2.Обратное преобразование Фурье. Формула Фурье. 3.Преобразование Фурье функций из L_1(R^m). Преобразование Фурье–Планшереля.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 3 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена 1 из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

6 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

1. Линейные функционалы. Примеры. Ядро линейного функционала. Взаимно однозначное соответствие между нетривиальными линейными функционалами и неоднородными аффинными гиперплоскостями.
2. Теорема о вложенных шарах.

Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса из программы экзамена. На подготовку к ответу студенту даётся 60 минут. Во время ответа студенту могут быть заданы дополнительные вопросы по программе экзамена.

I. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины

1. Компетенция/Индикатор: ИД-1$_{\text{ПК-2}}$ Демонстрирует знание терминологии, базовых результатов и методов фундаментальной математики

Вопросы, задания

1.Верхние/нижние грани и точные верхние/нижние грани подмножества частично упорядоченного множества. Решётки. Полные решётки. Примеры.
2.Векторные пространства. Операции над подмножествами векторного пространства. Подпространства. Аффинные многообразия. Примеры.
3.Решётка подпространств векторного пространства. Прямая сумма подпространств векторного пространства. Линейная оболочка. Линейные комбинации векторов.
4.Линейно независимые системы векторов. Полные системы векторов. Базисы Гамеля. Теорема существования базиса Гамеля.
5.Теорема о мощности базиса Гамеля. Размерность векторного пространства.
6.Изоморфизмы векторных пространств. Критерий изоморфности.
7.Фактор-пространство. Коразмерность подпространства векторного пространства. Теорема об алгебраическом дополнении подпространства векторного пространства.
8.Прямое произведение векторных пространств. Прямая сумма векторных пространств. Алгебры. Примеры.
9.Линейные отображения. Ядро, коядро, образ и кообраз линейного отображения. Примеры. Теорема об изоморфизме.
10.Проекторы. Проекторы суть идемпотентные операторы.
11.Пространство и алгебра линейных операторов. Аффинные отображения. Сопряженно-линейные операторы.
12.Линейные функционалы. Примеры. Ядро линейного функционала. Взаимно однозначное соответствие между нетривиальными линейными функционалами и неоднородными аффинными гиперплоскостями.
13.Выпуклые множества. Выпуклая оболочка множества. Окруженные точки множества. Алгебраическая внутренность множества. Выпуклые тела. Уравновешенные и поглощающие множества. Примеры.
14.Однородно-выпуклые функционалы и полунормы. Свойства множества $\{x: p(x)\leq c\}$.

15.Функционал Минковского и его свойства. Всякая полунорма является функционалом Минковского.
16.Нормы. Нормированные векторные пространства и естественная метрика в них. Ядро полунормы. Факторизация полунормы.
17.Теоремы Хана–Банаха и Сухомлинова–Бонеблюста–Собчика.
18.Теорема отделимости выпуклых множеств.
19.Эквивалентные нормы на векторном пространстве. Эквивалентность всех норм на конечномерном векторном пространстве. Замкнутость конечномерных подпространств нормированных пространств.
20.Банаховы пространства. Примеры. Пополнение нормированного пространства. Теорема Хаусдорфа о пополнении.
21.Ряды в нормированных пространствах. Критерий Коши сходимости ряда. Абсолютно сходящиеся ряды.
22.Теорема о размерности бесконечномерного банахова пространства.
23.Тотальные системы элементов. Базисы Шаудера. Сепарабельность пространств, обладающих базисом Шаудера.
24.Изоморфизмы и изометрические изоморфизмы нормированных пространств. Прямое произведение нормированных пространств. Фактор-пространство.
25.Вполне упорядоченные множества. Теорема Цермело. Принцип трансфинитной индукции.
26.Аксиома выбора. Теорема о функции выбора. Принцип максимума Хаусдорфа (без доказательства). Лемма Куратовского–Цорна.
27.Теорема Рисса о "почти перпендикуляре". Необходимое и достаточное условие компактности замкнутого шара в нормированном пространстве.
28.Отношения частичного порядка. Линейно упорядоченные множества. Максимальные/минимальные элементы, наибольшие/наименьшие элементы. Примеры.
29.Пространства l_p, $1\le p<\infty$. Неравенство Гёльдера. Неравенство Минковского. Вложения. Полнота пространства l_p.
30.Пространства L_p, $1\le p<\infty$. Неравенство Гёльдера. Неравенство Минковского. Вложения. Полнота пространства L_p.
31.Приближение функций из L_p ($1\le p<\infty$) простыми и непрерывными функциями.
32.Приближение функций из L_p ($1\le p<\infty$) финитными непрерывными функциями. Непрерывность функций из L_p относительно сдвига.
33.Пространство l_∞. Полнота пространства l_∞. Теорема о равенстве $\|\bullet\|_\infty=\lim \|\bullet\|_p$.
34.Существенно ограниченные функции. Существенные супремум и инфимум функции. Пространство L_∞. Полнота пространства L_∞. Теорема о равенстве $\|\bullet\|_\infty=\lim \|\bullet\|_p$.
35.Свёртка функций из пространств Лебега и её свойства.
36.Усреднение функций из пространств Лебега. Средние функции и их свойства.
37.Плотность в L_p, $1\le p<\infty$, множества бесконечно дифференцируемых финитных функций.
38.Теорема о полноте фактор-пространства.

Материалы для проверки остаточных знаний

1.Пространство $Lp(E)$ вложено в пространство $Lq(E)$, если

Ответы:

а) $p\le q$ и E — любое измеримое подмножество R.
б) $q\le p$ и E — любое измеримое подмножество R.
в) $p\le q$ и E — измеримое подмножество R конечной меры.
г) $q\le p$ и E — измеримое подмножество R конечной меры.

Верный ответ: г

2.Верно ли, что все пространства L_p при $1\le p\le\infty$ полны?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

3.Сепарабельно ли пространство L_∞?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

4.Выберите из списка нигде не плотные множества на числовой прямой **R**.

Ответы:

а) Множество всех рациональных чисел **Q**.

б) Множество всех натуральных чисел **N**.

в) Множество Кантора.

г) Множество {x∈**R**: ∃ k∈**N** cos(kx)=0}.

д) Множество A⊂**R** такое, что для любых n,k∈**N** множество (n+1/k,n+1-1/k)∩A конечно.

Верный ответ: б, в, д

5.Компактен ли замкнутый шар в пространстве C[a,b]?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

6.Установите соответствие между понятиями и их определениями.

Ответы:

1. Мономорфизм
2. Эпиморфизм
3. Изоморфизм

а) Линейное отображение одного векторного пространства в другое, образ которого совпадает со всем пространством, в которое происходит отображение.

б) Линейное отображение одного векторного пространства в другое, у которого ядро тривиально и образ совпадает со всем пространством, в которое происходит отображение.

в) Линейное отображение одного векторного пространства в другое, имеющее тривиальное ядро.

Верный ответ: 1 — в 2 — а 3 — б

7.Является ли множество точек <x,y> вещественной плоскости R, удовлетворяющих неравенству $x + y < 1$, выпуклым?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

8.Ядро нетривиального линейного функционала является

Ответы:

а) подпространством размерности 1.

б) подпространством коразмерности 1.

в) подпространством размерности 2.

г) подпространством коразмерности 2.

Верный ответ: б

9.Если на векторном пространстве заданы две эквивалентные нормы, то

Ответы:

а) из полноты пространства в одной из этих норм следует полнота пространства и в другой.

б) из полноты пространства в одной из этих норм не следует полнота пространства в другой.

в) из сепарабельности пространства в одной из этих норм следует сепарабельность пространства и в другой.

г) из сепарабельности пространства в одной из этих норм не следует сепарабельность пространства в другой.
д) шар в одной из этих норм является шаром и в другой, возможно, другого радиуса.
е) шар в одной из этих норм является шаром и в другой только в случае, когда эти нормы пропорциональны.

Верный ответ: а, в, е

10.Из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда только в ___________ пространстве.

Ответы:

Впишите нужное слово.

Верный ответ: банахово/полное

2. Компетенция/Индикатор: ИД-$3_{ПК\text{-}2}$ Использует базовые знания и методы фундаментальной математики для анализа простейших свойств математических моделей

Вопросы, задания

1.Всюду плотные множества. Сепарабельные метрические пространства. Сепарабельность l_p (1≤p<∞) и несепарабельность l_∞.
2.Сепарабельность подпространства сепарабельного пространства. Теорема Линделёфа.
3.Теорема о вложенных шарах.
4.Нигде не плотные множества. Множества первой и второй категорий Бэра. Теорема Бэра о категориях.
5.Пополнение метрического пространства. Теорема Хаусдорфа о пополнении.
6.Равномерно непрерывные отображения. Принцип продолжения по непрерывности.
7.Компактность и секвенциальная компактность. Лемма о числе Лебега. Эквивалентность компактности и секвенциальной компактности в метрических пространствах.
8.Сепарабельность и полнота компактного метрического пространства. Вполне ограниченные множества. Критерий компактности Хаусдорфа.
9.Теорема о непрерывном образе компакта и её следствия. Теорема Кантора.
10.Метрическое пространство C(K,M), его полнота и сепарабельность.
11.Сепарабельность пространства L_p (1≤p<∞) и несепарабельность L_∞.
12.Критерий относительной компактности в C(K,M). Критерий Асколи–Арцела.
13.Критерий Рисса относительной компактности в L_p, 1≤p<∞.
14.Аппроксимационная теорема Вейерштрасса. Сепарабельность C[a,b].

II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» ставится, если студент обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание материалов дисциплины, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, даёт полный исчерпывающий ответ, как на основные вопросы билета, так и на дополнительные вопросы экзаменатора.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» ставится, если студент обнаруживает полное знание материалов дисциплины, успешно выполняет предусмотренные программой задания; в ответе имеют место несущественные неточности, которые студент способен исправить самостоятельно, благодаря наводящему вопросу.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает знание материалов дисциплины в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляется с выполнением заданий, предусмотренных программой; в ответе на основные вопросы билета и/или дополнительные вопросы экзаменатора имеются существенные неточности, но студент обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством экзаменатора.

III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих.

7 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

1. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
2. Теорема Рисса–Фреше. Скалярное умножение на сопряжённом к гильбертову пространству.

Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса из программы экзамена. На подготовку к ответу студенту даётся 60 минут. Во время ответа студенту могут быть заданы дополнительные вопросы по программе экзамена.

I. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины

1. Компетенция/Индикатор: ИД-$1_{\text{ПК-2}}$ Демонстрирует знание терминологии, базовых результатов и методов фундаментальной математики

Вопросы, задания

1.Сопряжённое пространство. Связь сепарабельности сопряжённого пространства с сепарабельностью исходного пространства.
2.Норма линейного непрерывного оператора. Нормированные алгебры. Примеры.
3.Нормированное пространство L(X,Y) и его полнота.
4.Непрерывность любого линейного оператора, действующего из конечномерного пространства. Пример линейного оператора, не являющегося непрерывным.
5.Непрерывность оператора ортогонального проектирования в гильбертовом пространстве. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве был ортопроектором.
6.Представление нормированного пространства в виде прямой суммы подпространств. Дополняемые подпространства. Непрерывные вложения нормированных пространств. Примеры.
7.Теорема Банаха–Штейнгауза.
8.Теорема о поточечном пределе последовательности линейных непрерывных операторов. Теорема о поточечной сходимости на тотальном множестве.
9.Обратный оператор. Существование непрерывного обратного оператора. Непрерывно обратимые операторы и корректные по Адамару–Петровскому линейные задачи.
10.Теорема Банаха об открытости сюръективного линейного оператора (без доказательства). Теорема Банаха об изоморфизме.

11.Теорема о ряде Неймана и её следствия.
12.Геометрическая интерпретация нормы линейного непрерывного функционала.
13.Теорема Хана–Банаха и её следствия.
14.Теорема об отделимости выпуклых множеств в нормированном пространстве линейным непрерывным функционалом. Теорема Мазура.
15.Линейные непрерывные операторы. Теорема о свойствах линейного оператора, эквивалентных непрерывности. Векторное пространство L(X,Y).

2. Компетенция/Индикатор: ИД-$З_{ПК-2}$ Использует базовые знания и методы фундаментальной математики для анализа простейших свойств математических моделей

Вопросы, задания

1.Теорема Рисса–Фреше. Скалярное умножение на сопряжённом к гильбертову пространству.
2.Наследование свойства рефлексивности замкнутыми подпространствами. Инвариантность рефлексивности относительно изоморфизмов. Связь рефлексивности банахова пространства с рефлексивностью сопряжённого к нему.
3.Слабая и *-слабая сходимости. Единственность слабого предела. Связь с сильной сходимостью. Сохранение слабой сходимости при действии линейного непрерывного оператора.
4.Слабо фундаментальные последовательности. Ограниченность слабо фундаментальной последовательности. Слабо полные пространства. Слабая полнота рефлексивных пространств.
5.Теорема Банаха–Алаоглу. Слабая секвенциальная компактность замкнутого шара в рефлексивном пространстве.
6.Сопряжённый оператор в пространстве со скалярным умножением. Существование сопряжённого к линейному непрерывному оператору в гильбертовом пространстве. Самосопряжённые операторы. Примеры.
7.Необходимое и достаточное условие самосопряжённости оператора в унитарном пространстве. Норма самосопряжённого оператора. Частичный порядок на множестве самосопряжённых операторов.
8.Сопряжённый оператор в нормированных пространствах. Существование сопряжённого к линейному непрерывному оператору.
9.Компактные (вполне непрерывные) линейные операторы. Необходимое и достаточное условие компактности линейного непрерывного оператора, действующего из рефлексивного пространства. Теорема Шаудера.
10.Интегральный оператор с ядром Гильберта–Шмидта.
11.Линейные уравнения с компактными операторами.
12.Фредгольмовы операторы. Лемма Рисса. Теорема о ядрах и образах итераций фредгольмова оператора.
13.Теоремы Фредгольма.
14.Характеристические значения и собственные векторы линейного оператора. Переформулировка теорем Фредгольма в терминах характеристических значений компактного оператора.
15.Регулярные значения линейного оператора. Резольвента и резольвентное множество. Спектр линейного оператора. Точечный и непрерывный спектр.
16.Замкнутость и ограниченность спектра линейного непрерывного оператора в банаховом пространстве.
17.Тождество Гильберта. Непустота спектра линейного непрерывного оператора в нетривиальном банаховом пространстве.

18.Собственные значения и собственные векторы самосопряжённого оператора в пространстве со скалярным умножением. Спектр компактного оператора в банаховом пространстве.
19.Спектр компактного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве.
20.Теорема Гильберта–Шмидта и её следствия.
21.Преобразование Фурье функций из L_1(R). Оператор Фурье и его норма.
22.Операция дифференцирования и преобразование Фурье функций из L_1(R).
23.Обратное преобразование Фурье функций из L_1(R).
24.Преобразование Фурье свёртки.
25.Преобразование Фурье функций из L_1(R^m).
26.Операция дифференцирования и преобразование Фурье функций из L_1(R^m).
27.Обратное преобразование Фурье функций из L_1(R^m).
28.Пространство Шварца. Преобразование Фурье функций из пространства Шварца. Равенство Парсеваля.
29.Второе сопряжённое пространство. Естественное изометрическое вложение нормированного пространства во второе сопряжённое к нему. Рефлексивные пространства.
30.Теоремы об общем виде линейного непрерывного функционала на пространствах l_p и L_p (1≤p<∞).
31.Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа.
32.Пространства со скалярным умножением. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Норма в пространстве со скалярным умножением.
33.Тождество параллелограмма.
34.Изоморфизмы пространств со скалярным умножением.
35.Ортогональность в пространстве со склалярным умножением. Угол между векторами евклидова пространства. Ортогональные и ортонормированные семейства векторов.
36.Существование не более чем счётной тотальной ортонормированной системы в сепарабельном пространстве со скалярным умножением. Изоморфность любых двух конечномерных пространств со скалярным умножением одной размерности.
37.Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
38.Равенство Парсеваля. Ортонормированные базисы.
39.Гильбертовы пространства. Примеры. Пополнение пространств со скалярным умножением.
40.Задача о наилучшем приближении и простейшие случаи её разрешимости.
41.Однозначная разрешимость задачи о наилучшем приближении для замкнутых выпуклых подмножеств гильбертова пространства. Ортогональная проекция.
42.Ортогональное дополнение. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства и её следствия. Оператор ортогонального проектирования (ортопроектор).
43.Замкнутые и максимальные ортонормированные системы. Связь с ортонормированными базисами.
44.Преобразование Фурье–Планшереля функций из L_2(R^m). Теорема Планшереля.
45.Теорема Рисса–Фишера. Изоморфность сепарабельных гильбертовых пространств.

Материалы для проверки остаточных знаний

1.Гильбертово пространство — это

Ответы:

а) полное нормированное пространство.
б) полное пространство со скалярным умножением.
в) пространство со скалярным умножением, в котором есть ортонормированный базис.
г) сепарабельное пространство со скалярным умножением.

Верный ответ: б

2.Пусть H — некоторое гильбертово пространство. Верно ли, что для любого подпространства $L \subset H$ справедливо разложение $H=L \oplus L^\perp$?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

3.Пусть X, Y — нормированные пространства и $A:X \to Y$ — линейный оператор. Выберите утверждения, эквивалентные непрерывности оператор A на пространстве X.

Ответы:

а) Оператор A непрерывен в точке 0 пространства X.

б) Оператор A непрерывен в некоторой точке $x0 \in X$.

в) Оператор A переводит некоторое ограниченное множество в ограниченное множество.

г) Оператор A переводит некоторый невырожденный шар в ограниченное множество.

д) Оператор A переводит некоторую невырожденную сферу в ограниченное множество.

е) Оператор A является липшицевым отображением.

ж) В сколь угодно малой окрестности 0 пространства X есть точки, которые оператор A переводит в точки единичной сферы пространства Y.

Верный ответ: а, б, г, д, е

4.Пусть X, Y — банаховы пространства и $A:X \to Y$ — линейный непрерывный оператор, взаимно однозначно отображающий X на всё Y. Верно ли, что обратный оператор $A^{-1}:Y \to X$ обязательно непрерывный?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

5.Верно ли, что сопряжённое к любому нормированному пространству является банаховым пространством?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

6.Верно ли, что сопряжённое к любому сепарабельному нормированному пространству является сепарабельным пространством?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

7.Компактный (вполне непрерывный) линейный оператор — это оператор, который переводит

Ответы:

а) любое компактное множество в компактное множество.

б) любое компактное множество в ограниченное множество.

в) любое относительно компактное множество в относительно компактное множество.

г) любое ограниченное множество в относительно компактное множество.

д) любое относительно компактное множество в ограниченное множество.

е) любое ограниченное множество в ограниченное множество.

Верный ответ: г

8.Пусть H — гильбертово пространство и $A:H \to H$ — линейный непрерывный оператор. Что можно сказать о сопряжённом операторе $A^*:H \to H$?

Ответы:

а) Сопряжённый оператор существует не при любом A.

б) Сопряжённый оператор существует при любом A, но может не быть непрерывным и, вообще говоря, определяется не однозначно.

в) Сопряжённый оператор существует при любом A и непрерывен, но определяется не однозначно.

г) Сопряжённый оператор существует при любом A, непрерывен и однозначно определён.

Верный ответ: г

9.Верно ли, что оператор преобразования Фурье является линейным непрерывным оператором из пространства L_1(R) в пространство B(R)?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

10.Преобразование Фурье свёртки двух функций с точностью до мультипликативной константы равно

Ответы:

а) сумме преобразований Фурье каждой из этих функций.

б) произведению преобразований Фурье каждой из этих функций.

в) частному преобразования Фурье первой функции на преобразование Фурье второй функции.

г) произведению преобразования Фурье первой функции на вторую функцию.

Верный ответ: б

II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» ставится, если студент обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание материалов дисциплины, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, даёт полный исчерпывающий ответ, как на основные вопросы билета, так и на дополнительные вопросы экзаменатора.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» ставится, если студент обнаруживает полное знание материалов дисциплины, успешно выполняет предусмотренные программой задания; в ответе имеют место несущественные неточности, которые студент способен исправить самостоятельно, благодаря наводящему вопросу.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает знание материалов дисциплины в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляется с выполнением заданий, предусмотренных программой; в ответе на основные вопросы билета и/или дополнительные вопросы экзаменатора имеются существенные неточности, но студент обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством экзаменатора.

III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих.