

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

---

Направление подготовки/специальность: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Наименование образовательной программы: Математическое моделирование

Уровень образования: высшее образование - бакалавриат

Форма обучения: Очная

**Рабочая программа дисциплины**  
**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**


<b>Блок:</b>	<b>Блок 1 «Дисциплины (модули)»</b>
<b>Часть образовательной программы:</b>	<b>Часть, формируемая участниками образовательных отношений</b>
<b>№ дисциплины по учебному плану:</b>	<b>Б1.Ч.03</b>
<b>Трудоемкость в зачетных единицах:</b>	<b>5 семестр - 5;</b>
<b>Часов (всего) по учебному плану:</b>	<b>180 часов</b>
<b>Лекции</b>	<b>5 семестр - 48 часа;</b>
<b>Практические занятия</b>	<b>5 семестр - 32 часа;</b>
<b>Лабораторные работы</b>	<b>не предусмотрено учебным планом</b>
<b>Консультации</b>	<b>5 семестр - 2 часа;</b>
<b>Самостоятельная работа</b>	<b>5 семестр - 97,5 часа;</b>
<b>в том числе на КП/КР</b>	<b>не предусмотрено учебным планом</b>
<b>Иная контактная работа</b>	<b>проводится в рамках часов аудиторных занятий</b>
<b>включая:</b>	
<b>Контрольная работа</b>	
<b>Промежуточная аттестация:</b>	
<b>Экзамен</b>	<b>5 семестр - 0,5 часа;</b>

**Москва 2021**

## ПРОГРАММУ СОСТАВИЛ:

Преподаватель

(должность)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Амосов А.А.
	Идентификатор	R9a3a6370-AmosovAA-723724c4

(подпись)

А.А. Амосов

(расшифровка  
подписи)

## СОГЛАСОВАНО:

Руководитель  
образовательной программы

(должность, ученая степень, ученое звание)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Черепова М.Ф.
	Идентификатор	R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1

(подпись)

М.Ф. Черепова

(расшифровка  
подписи)

Заведующий выпускающей  
кафедры

(должность, ученая степень, ученое звание)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Зубков П.В.
	Идентификатор	R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c

(подпись)

П.В. Зубков

(расшифровка  
подписи)

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

**Цель освоения дисциплины:** изучение основ теории функций и функционального анализа

### Задачи дисциплины

- освоение элементов теории множеств;
- изучение основ теории метрических пространств;
- освоение теории меры Лебега;
- освоение теории интеграла Лебега.

Формируемые у обучающегося **компетенции** и запланированные **результаты обучения** по дисциплине, соотнесенные с **индикаторами достижения компетенций**:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Запланированные результаты обучения
ПК-2 Способен участвовать в компьютерной реализации математических моделей	ИД-1 <sub>ПК-2</sub> Демонстрирует знание терминологии, базовых результатов и методов фундаментальной математики	знать: - терминологию и базовые результаты теории множеств; - терминологию и основные результаты теории меры и теории измеримых функций.
ПК-2 Способен участвовать в компьютерной реализации математических моделей	ИД-3 <sub>ПК-2</sub> Использует базовые знания и методы фундаментальной математики для анализа простейших свойств математических моделей	уметь: - исследовать простейшие свойства подмножеств метрических пространств и применять принцип сжимающих отображений; - анализировать свойства измеримости множеств и функций, интегрируемости функций по Лебегу и применять базовые результаты теории интеграла Лебега.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ВО

Дисциплина относится к основной профессиональной образовательной программе Математическое моделирование (далее – ОПОП), направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, уровень образования: высшее образование - бакалавриат.

Требования к входным знаниям и умениям:

- знать математический анализ
- знать линейную алгебру и аналитическую геометрию

Результаты обучения, полученные при освоении дисциплины, необходимы при выполнении выпускной квалификационной работы.

### 3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 3.1 Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов.

№ п/п	Разделы/темы дисциплины/формы промежуточной аттестации	Всего часов на раздел	Семестр	Распределение трудоемкости раздела (в часах) по видам учебной работы										Содержание самостоятельной работы/ методические указания	
				Контактная работа							СР				
				Лек	Лаб	Пр	Консультация		ИКР		ПА	Работа в семестре	Подготовка к аттестации /контроль		
КПР	ГК	ИККП	ТК												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	Элементы теории множеств	28	5	9	-	7	-	-	-	-	-	12	-	<p><b><u>Подготовка к контрольной работе:</u></b> Изучение материалов по разделу «Элементы теории множеств» и подготовка к контрольной работе.</p> <p><b><u>Подготовка домашнего задания:</u></b> Подготовка домашнего задания направлена на отработку умений решения профессиональных задач. Домашнее задание выдается студентам по изученному в разделе «Элементы теории множеств» материалу.</p> <p><b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b> [1], стр. 17–35 [2], стр. 32, 33 [3], стр. 3–10 [4], стр. 15–17, 23–25, 31–34, 40–42, 46, 47, 51–53</p>	
1.1	Элементы теории множеств	28		9	-	7	-	-	-	-	-	12	-		
2	Элементы теории метрических пространств	42		14	-	9	-	-	-	-	-	-	19		-
2.1	Элементы теории метрических пространств	42		14	-	9	-	-	-	-	-	-	19		-

													<b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b> [1], стр. 54–72, 81–89 [2], стр. 55 [3], стр. 11–19
3	Мера Лебега и измеримые функции	42	14	-	9	-	-	-	-	-	19	-	<b><u>Подготовка домашнего задания:</u></b> Подготовка домашнего задания направлена на отработку умений решения профессиональных задач. Домашнее задание выдается студентам по изученному в разделе «Мера Лебега и измеримые функции» материалу.
3.1	Мера Лебега и измеримые функции	42	14	-	9	-	-	-	-	-	19	-	<b><u>Подготовка к контрольной работе:</u></b> Изучение материалов по разделу «Мера Лебега и измеримые функции» и подготовка к контрольной работе. <b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b> [2], стр. 85, 107, 108 [3], стр. 20–28
4	Интеграл Лебега	32	11	-	7	-	-	-	-	-	14	-	<b><u>Подготовка домашнего задания:</u></b> Подготовка домашнего задания направлена на отработку умений решения профессиональных задач. Домашнее задание выдается студентам по изученному в разделе «Интеграл Лебега» материалу.
4.1	Интеграл Лебега	32	11	-	7	-	-	-	-	-	14	-	<b><u>Подготовка к контрольной работе:</u></b> Изучение материалов по разделу «Интеграл Лебега» и подготовка к контрольной работе. <b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b> [2], стр. 152, 153 [3], стр. 29–35
	Экзамен	36.0	-	-	-	-	2	-	-	0.5	-	33.5	
	Всего за семестр	180.0	48	-	32	-	2	-	-	0.5	64	33.5	
	Итого за семестр	180.0	48	-	32		2		-	0.5		97.5	

**Примечание:** Лек – лекции; Лаб – лабораторные работы; Пр – практические занятия; КПП – аудиторные консультации по курсовым проектам/работам; ИККП – индивидуальные консультации по курсовым проектам/работам; ГК- групповые консультации по разделам

дисциплины; СР – самостоятельная работа студента; ИКР – иная контактная работа; ТК – текущий контроль; ПА – промежуточная аттестация

### 3.2 Краткое содержание разделов

#### 1. Элементы теории множеств

##### 1.1. Элементы теории множеств

Элементарные операции над множествами. Принцип двойственности. Отношения и отображения. Взаимно однозначные отображения. Операции над бесконечными семействами множеств и их свойства. Отношения эквивалентности и разбиения. Мощность (кардинальное число) множества. Теорема Кантора–Бернштейна. Арифметика кардинальных чисел. Счетные множества. Мощность континуума. Системы множеств. Понятие о кольцах, алгебрах и  $\sigma$ -алгебрах множеств..

#### 2. Элементы теории метрических пространств

##### 2.1. Элементы теории метрических пространств

Определение метрического пространства и примеры. Предел последовательности в метрическом пространстве. Полнота метрического пространства. Открытые и замкнутые множества. Внутренние, внешние и граничные точки. Предельные точки, точки прикосновения, изолированные точки. Замыкание и внутренность множества. Теорема об отделимости непересекающихся замкнутых множеств. Плотные в себе и совершенные множества. Открытые и замкнутые множества на числовой прямой. Канторово множество. Непрерывные отображения метрических пространств. Гомеоморфизмы. Принцип сжимающих отображений и его обобщение. Примеры применения принципа сжимающих отображений. Ограниченные множества. Компактные множества. Лемма Гейне–Бореля..

#### 3. Мера Лебега и измеримые функции

##### 3.1. Мера Лебега и измеримые функции

Мера промежутка в  $\mathbb{R}^m$  и ее свойства. Мера открытого множества и ее свойства. Внешняя мера и ее свойства. Измеримые множества и их свойства. Лебегова  $\sigma$ -алгебра измеримых множеств. Множества типа  $F_\sigma$  и  $G_\delta$  и их связь с измеримыми множествами. Свойства меры Лебега. Существование неизмеримых множеств. Измеримые функции и их свойства. Теорема Лузина. Арифметические операции над измеримыми функциями. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Последовательности измеримых функций. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема Лебега. Теорема Рисса. Теорема Егорова..

#### 4. Интеграл Лебега

##### 4.1. Интеграл Лебега

Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции по множеству конечной меры и его свойства. Теорема Лебега. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману и его следствия. Интеграл Лебега от неограниченной измеримой функции по множеству конечной меры. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры. Абсолютная непрерывность и счетная аддитивность интеграла Лебега. Последовательности суммируемых функций. Сходимость в среднем. Неравенство Чебышева. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Теоремы Б. Леви и Фату. Связь между различными видами сходимости суммируемых функций. Теорема о сечениях измеримого множества. Теорема Фубини..

### 3.3. Темы практических занятий

1. Элементарные операции над множествами. Отношения и отображения.;
2. Операции над бесконечными семействами множеств. Разбиения.;

3. Мощность множества. Теорема Кантора–Бернштейна.;
4. Счетные множества. Мощность континуума.;
5. Метрика. Полные и неполные метрические пространства.;
6. Открытые и замкнутые множества. Внутренние, внешние и граничные точки. Предельные точки, точки прикосновения, изолированные точки. Канторово множество.;
7. Непрерывные отображения. Принцип сжимающих отображений.;
8. Компактные множества. Лемма Гейне–Бореля.;
9. Внешняя мера. Измеримые множества и их свойства.;
10. Свойства меры Лебега.;
11. Измеримые функции и их свойства.;
12. Сходимость по мере и сходимость почти всюду.;
13. Интеграл Лебега.;
14. Последовательности суммируемых функций. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Теоремы Леви и Фату.;
15. Связь между различными видами сходимости суммируемых функций.;
16. Теорема Фубини..

### **3.4. Темы лабораторных работ**

не предусмотрено

### **3.5 Консультации**

#### *Групповые консультации по разделам дисциплины (ГК)*

1. Обсуждение материалов по разделу «Элементы теории множеств».
2. Обсуждение материалов по разделу «Элементы теории метрических пространств».
3. Обсуждение материалов по разделу «Мера Лебега и измеримые функции».
4. Обсуждение материалов по разделу «Интеграл Лебега».

### **3.6 Тематика курсовых проектов/курсовых работ**

Курсовой проект/ работа не предусмотрены



### 3.7. Соответствие разделов дисциплины и формируемых в них компетенций

Запланированные результаты обучения по дисциплине (в соответствии с разделом 1)	Коды индикаторов	Номер раздела дисциплины (в соответствии с п.3.1)				Оценочное средство (тип и наименование)
		1	2	3	4	
<b>Знать:</b>						
терминологию и основные результаты теории меры и теории измеримых функций	ИД-1ПК-2			+		Контрольная работа/Мера Лебега и измеримые функции
терминологию и базовые результаты теории множеств	ИД-1ПК-2	+				Контрольная работа/Элементы теории множеств
<b>Уметь:</b>						
анализировать свойства измеримости множеств и функций, интегрируемости функций по Лебегу и применять базовые результаты теории интеграла Лебега	ИД-3ПК-2				+	Контрольная работа/Интеграл Лебега
исследовать простейшие свойства подмножеств метрических пространств и применять принцип сжимающих отображений	ИД-3ПК-2		+			Контрольная работа/Элементы теории метрических пространств

## **4. КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ)**

### **4.1. Текущий контроль успеваемости**

#### **5 семестр**

Форма реализации: Письменная работа

1. Интеграл Лебега (Контрольная работа)
2. Мера Лебега и измеримые функции (Контрольная работа)
3. Элементы теории метрических пространств (Контрольная работа)
4. Элементы теории множеств (Контрольная работа)

Балльно-рейтинговая структура дисциплины является приложением А.

### **4.2 Промежуточная аттестация по дисциплине**

#### *Экзамен (Семестр №5)*

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих.

В диплом выставляется оценка за 5 семестр.

**Примечание:** Оценочные материалы по дисциплине приведены в фонде оценочных материалов ОПОП.

## **5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **5.1 Печатные и электронные издания:**

1. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин- "Элементы теории функций и функционального анализа", (7-е изд.), Издательство: "Физматлит", Москва, 2012 - (573 с.)  
<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563>;
2. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон . – 5-е изд., стер . – СПб. : Лань-Пресс, 2008 . – 560 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-0136-9 .;
3. Амосов, А. А. Задачи по теории функций и функциональному анализу: Множества. Метрические и топологические пространства. Мера и интеграл Лебега : Учебное пособие по курсу "Теория функций и функциональный анализ" / А. А. Амосов, Моск. энерг. ин-т (МЭИ) . – М. : Изд-во МЭИ, 1998 . – 64 с. - ISBN 5-7046-0317-3 : 4.50 .;
4. Боровиков, И. А. Элементы теории множеств : учебное пособие по направлению 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" / И. А. Боровиков, Нац. исслед. ун-т "МЭИ" . – М. : Изд-во МЭИ, 2017 . – 64 с. - ISBN 978-5-7046-1862-1 .  
[http://elib.mpei.ru/action.php?kt\\_path\\_info=ktcore.SecViewPlugin.actions.document&fDocumentId=9942](http://elib.mpei.ru/action.php?kt_path_info=ktcore.SecViewPlugin.actions.document&fDocumentId=9942).

### **5.2 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:**

1. СДО "Прометей";
2. Office / Российский пакет офисных программ;
3. Windows / Операционная система семейства Linux;
4. Майнд Видеоконференции;
5. Latex.

### 5.3 Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

1. ЭБС Лань - <https://e.lanbook.com/>
2. ЭБС "Университетская библиотека онлайн" - [http://biblioclub.ru/index.php?page=main\\_ub\\_red](http://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red)
3. Электронная библиотека МЭИ (ЭБ МЭИ) - <http://elib.mpei.ru/login.php>

### 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Тип помещения	Номер аудитории, наименование	Оснащение
Учебные аудитории для проведения лекционных занятий и текущего контроля	М-710, Учебная аудитория каф. МКМ	стол преподавателя, стол учебный, стул, доска меловая
	Ж-120, Машинный зал ИВЦ	сервер, кондиционер
Учебные аудитории для проведения практических занятий, КР и КП	М-710а, Учебная аудитория каф. МКМ	стол, стул, доска меловая
	М-808, Учебная аудитория	стол учебный, стул, доска меловая
	Ж-120, Машинный зал ИВЦ	сервер, кондиционер
Учебные аудитории для проведения промежуточной аттестации	М-710, Учебная аудитория каф. МКМ	стол преподавателя, стол учебный, стул, доска меловая
	Ж-120, Машинный зал ИВЦ	сервер, кондиционер
Помещения для самостоятельной работы	НТБ-303, Компьютерный читальный зал	стол компьютерный, стул, стол письменный, вешалка для одежды, компьютерная сеть с выходом в Интернет, компьютер персональный, принтер, кондиционер
Помещения для консультирования	М-714, Преподавательская каф. МКМ	рабочее место сотрудника, стул, шкаф, шкаф для документов, шкаф для одежды, тумба, доска меловая, мультимедийный проектор, экран, книги, учебники, пособия
Помещения для хранения оборудования и учебного инвентаря	М-301/1, Кладовая	стул
	М-713/1, Учебно-научная лаборатория каф. МКМ	рабочее место сотрудника, стул, шкаф, шкаф для одежды, тумба, компьютерная сеть с выходом в Интернет, компьютер персональный, книги, учебники, пособия

## БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВАЯ СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

## Теория функций и функциональный анализ

(название дисциплины)

## 5 семестр

**Перечень контрольных мероприятий текущего контроля успеваемости по дисциплине:**

КМ-1 Элементы теории множеств (Контрольная работа)

КМ-2 Элементы теории метрических пространств (Контрольная работа)

КМ-3 Мера Лебега и измеримые функции (Контрольная работа)

КМ-4 Интеграл Лебега (Контрольная работа)

**Вид промежуточной аттестации – Экзамен.**

Номер раздела	Раздел дисциплины	Индекс КМ:	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4
		Неделя КМ:	4	8	12	15
1	Элементы теории множеств					
1.1	Элементы теории множеств		+			
2	Элементы теории метрических пространств					
2.1	Элементы теории метрических пространств			+		
3	Мера Лебега и измеримые функции					
3.1	Мера Лебега и измеримые функции				+	
4	Интеграл Лебега					
4.1	Интеграл Лебега					+
Вес КМ, %:			25	25	25	25