

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

---

Направление подготовки/специальность: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Наименование образовательной программы: Математическое моделирование

Уровень образования: высшее образование - бакалавриат

Форма обучения: Очная


**Рабочая программа дисциплины**  
**СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ТЕОРИЯ МАССОВОГО**  
**ОБСЛУЖИВАНИЯ**

<b>Блок:</b>	Блок 1 «Дисциплины (модули)»
<b>Часть образовательной программы:</b>	Часть, формируемая участниками образовательных отношений
<b>№ дисциплины по учебному плану:</b>	Б1.Ч.11
<b>Трудоемкость в зачетных единицах:</b>	8 семестр - 4;
<b>Часов (всего) по учебному плану:</b>	144 часа
<b>Лекции</b>	8 семестр - 28 часа;
<b>Практические занятия</b>	8 семестр - 28 часа;
<b>Лабораторные работы</b>	не предусмотрено учебным планом
<b>Консультации</b>	8 семестр - 2 часа;
<b>Самостоятельная работа</b>	8 семестр - 85,5 часа;
<b>в том числе на КП/КР</b>	не предусмотрено учебным планом
<b>Иная контактная работа</b>	проводится в рамках часов аудиторных занятий
<b>включая:</b> <b>Контрольная работа</b> <b>Расчетно-графическая работа</b>	
<b>Промежуточная аттестация:</b>	
<b>Экзамен</b>	8 семестр - 0,5 часа;

**Москва 2023**

**ПРОГРАММУ СОСТАВИЛ:**


Преподаватель

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Горицкий Ю.А.
	Идентификатор	Rb6324da3-GoritskyYA-69420db9

Ю.А. Горицкий


**СОГЛАСОВАНО:**

Руководитель  
образовательной программы

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Черепова М.Ф.
	Идентификатор	R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1

М.Ф. Черепова

Заведующий выпускающей  
кафедрой

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Зубков П.В.
	Идентификатор	R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c

П.В. Зубков

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

**Цель освоения дисциплины:** изучение основ теории случайных процессов и основ теории массового обслуживания

### Задачи дисциплины

- изучение основ корреляционной теории (канонические разложения, стационарные процессы, спектральная теория);
- изучение основ теории марковских процессов (цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем, задачи достижения границ, уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова);
- изучение математических моделей СМО и методов их анализа.

Формируемые у обучающегося **компетенции** и запланированные **результаты обучения** по дисциплине, соотнесенные с **индикаторами достижения компетенций**:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Запланированные результаты обучения
РПК-2 Способен участвовать в компьютерной реализации математических моделей	ИД-2РПК-2 Демонстрирует понимание принципов построения простейших математических моделей различных явлений и процессов	знать: - основные модели СМО и методы их анализа; - основные уравнения для цепей Маркова с дискретным временем; - основные понятия теории случайных процессов; - основные уравнения для цепей Маркова с непрерывным временем.
РПК-2 Способен участвовать в компьютерной реализации математических моделей	ИД-3РПК-2 Использует базовые знания и методы фундаментальной математики для анализа простейших свойств математических моделей	уметь: - применять знания при описании конкретных процессов, в том числе, анализировать СМО, построить модель СМО и проанализировать ее.
РПК-2 Способен участвовать в компьютерной реализации математических моделей	ИД-4РПК-2 Применяет математические методы для аналитического и численного решения прикладных задач и анализирует полученные результаты	уметь: - определять предельные режимы и характеристики достижения границ для цепей Маркова с непрерывным временем; - определять предельные режимы и характеристики достижения границ для цепей Маркова с дискретным временем; - определять характеристики случайных процессов.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ВО

Дисциплина относится к основной профессиональной образовательной программе Математическое моделирование (далее – ОПОП), направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, уровень образования: высшее образование - бакалавриат.

Требования к входным знаниям и умениям:

- знать теорию вероятностей и математическую статистику, математический анализ, линейную алгебру и аналитическую геометрию

Результаты обучения, полученные при освоении дисциплины, необходимы при выполнении выпускной квалификационной работы.

### 3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 3.1 Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы, 144 часа.

№ п/п	Разделы/темы дисциплины/формы промежуточной аттестации	Всего часов на раздел	Семестр	Распределение трудоемкости раздела (в часах) по видам учебной работы										Содержание самостоятельной работы/ методические указания	
				Контактная работа							СР				
				Лек	Лаб	Пр	Консультация		ИКР		ПА	Работа в семестре	Подготовка к аттестации /контроль		
КПР	ГК	ИККП	ТК												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	Корреляционная теория	40	8	8	-	8	-	-	-	-	-	24	-	<p><b><u>Подготовка к контрольной работе:</u></b> Подготовка к КР1 "Корреляционная теория" включает повторение материала по разделу "Корреляционная теория" и разбор решенных задач по теме (определение законов распределения значений процесса, числовых характеристик, линейные преобразования, каноническое разложение, спектральные характеристики)</p> <p><b><u>Подготовка домашнего задания:</u></b> Выполнение домашнего задания направлено на отработку умений решения задач по теме, а именно: определение законов распределения значений процесса, числовых характеристик, линейные преобразования, каноническое разложение, спектральные характеристики). Домашнее задание выдается студентам по изученному в разделе "Корреляционная теория" материалу.</p> <p><b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b> [1], 7-45 [3], 270-306, 271-299 [4], 12-56</p>	
1.1	Корреляционная теория	40		8	-	8	-	-	-	-	-	-	24		-
2	Марковские процессы. Простые цепи	34		10	-	8	-	-	-	-	-	-	16		-
2.1	Марковские	34	10	-	8	-	-	-	-	-	-	16	-	<p><b><u>Подготовка к контрольной работе:</u></b> Подготовка к КР2 "Простые цепи Маркова" состоит в повторении теории по разделу "Марковские процессы. Простые цепи" и</p>	

	процессы. Простые цепи												<p>разбор решенных задач .</p> <p><b><u>Подготовка домашнего задания:</u></b> Подготовка домашнего задания направлена на отработку умение решать задачи по теме "Простые цепи Маркова" (а именно, составление уравнений цепи, определение распределения в произвольный момент , классификация состояний и определение предельных вероятностей). При подготовке предполагается изучение теории по разделу "Марковские процессы. Простые цепи" и решение задач.</p> <p><b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b> [1], 93-120 [3], 339-345, 321-323 [4], 57-97</p>
3	Цепи Маркова с непрерывным временем	18	4	-	6	-	-	-	-	-	8	-	<p><b><u>Подготовка к контрольной работе:</u></b> Подготовка к контрольной работе КР2 предполагает повторение теории по разделу "Цепи Маркова с непрерывным временем"</p> <p><b><u>Подготовка домашнего задания:</u></b> Выполнение домашнего задания "Цепи Маркова с непрерывным временем" направлено на отработку умение решать задачи по этой теме, а именно переход от физического процесса к графу цепи, определение плотностей переходов, уравнений для предельных вероятностей, решение простых задач на достижение границ. При подготовке предполагается повторение теории по лекционному разделу "Цепи МАРкова с непрерывным временем" и выполнение домашних заданий.</p> <p><b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b> [1], 121-168 [3], 345-359, 323-326 [4], 100-117</p>
3.1	Цепи Маркова с непрерывным временем	18	4	-	6	-	-	-	-	-	8	-	<p><b><u>Подготовка к контрольной работе:</u></b> Подготовка к контрольной работе КР2 предполагает повторение теории по разделу "Цепи Маркова с непрерывным временем"</p> <p><b><u>Подготовка домашнего задания:</u></b> Выполнение домашнего задания "Цепи Маркова с непрерывным временем" направлено на отработку умение решать задачи по этой теме, а именно переход от физического процесса к графу цепи, определение плотностей переходов, уравнений для предельных вероятностей, решение простых задач на достижение границ. При подготовке предполагается повторение теории по лекционному разделу "Цепи МАРкова с непрерывным временем" и выполнение домашних заданий.</p> <p><b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b> [1], 121-168 [3], 345-359, 323-326 [4], 100-117</p>

4	Основы теории массового обслуживания	16		6	-	6	-	-	-	-	-	4	-	<u>Подготовка расчетных заданий:</u> Выполняется задание по составлению марковской модели СМО и расчета ее характеристик, <u>Изучение материалов литературных источников:</u> [2], 12-92 [3], 366-385 [4], 124-153 [5], 12-92
4.1	Основы теории массового обслуживания	16		6	-	6	-	-	-	-	-	4	-	
	Экзамен	36.0		-	-	-	-	2	-	-	0.5	-	33.5	
	Всего за семестр	144.0		28	-	28	-	2	-	-	0.5	52	33.5	
	Итого за семестр	144.0		28	-	28		2	-		0.5		85.5	

**Примечание:** Лек – лекции; Лаб – лабораторные работы; Пр – практические занятия; КПП – аудиторные консультации по курсовым проектам/работам; ИККП – индивидуальные консультации по курсовым проектам/работам; ГК- групповые консультации по разделам дисциплины; СР – самостоятельная работа студента; ИКР – иная контактная работа; ТК – текущий контроль; ПА – промежуточная аттестация

## 3.2 Краткое содержание разделов

### 1. Корреляционная теория

#### 1.1. Корреляционная теория

Основные понятия теории случайных процессов (определения, способы задания, числовые характеристики). Корреляционная функция и ее свойства. Числовые характеристики линейно-преобразованных случайных процессов. Условие дифференцируемости. Общая формула для характеристик преобразованного процесса. Каноническое разложение случайных процессов (определение, прохождение через линейную систему, определение координатных функций и коэффициентов разложения). Стационарные процессы. Свойства корреляционной функции. Спектральное разложение стационарного в широком смысле процесса на конечном и бесконечном интервалах в вещественной форме. Формулы Винера-Хинчина. Комплексная форма спектрального разложения стационарного процесса. Телеграфный сигнал, его корреляционная функция и спектральная плотность. Преобразование стационарного процесса линейным стационарным оператором (определение, частотная характеристика, характеристики выходного процесса, пример). Процесс белого шума. Прохождение белого шума через RC-цепь.

### 2. Марковские процессы. Простые цепи

#### 2.1. Марковские процессы. Простые цепи

Основные понятия: определения, задание, основные соотношения. Простые цепи Маркова: определение, основные соотношения, теорема о предельных вероятностях. Классификация состояний цепи Маркова: существенные и несущественные состояния, классы, период, подклассы. Теоремы о предельных вероятностях. Возвратные и невозвратные состояния. Критерий возвратности. Среднее время возвращения. Достижение границы. Уравнения для среднего времени и вторых моментов. Задача о разорении игрока. Достижение границы. Уравнения для производящих функций времен достижения. Обобщение на аддитивный функционал. Теорема об усреднении по времени.

### 3. Цепи Маркова с непрерывным временем

#### 3.1. Цепи Маркова с непрерывным временем

Прямая и обратная системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Процесс Пуассона. Телеграфный сигнал. Свойства цепей Маркова с непрерывным временем. Вложенная цепь Маркова. Достижение границ: уравнения для вероятностей, для среднего времени достижения; уравнения для аддитивного функционала. Эргодичность.

### 4. Основы теории массового обслуживания

#### 4.1. Основы теории массового обслуживания

Задачи теории и примеры. Элементы СМО и критерии качества. Системы с потерями и с ожиданием. Процессы размножения и гибели. Стационарное распределение. Одноканальные и многоканальные системы, определение основных характеристик. Анализ различных типов марковских СМО. Немарковские СМО. Метод фиктивных фаз Эрланга. Метод Кендалла вложенных цепей.

## 3.3. Темы практических занятий

1. Основные характеристики случайных процессов;
2. Прохождение через линейную систему;
3. Канонические разложения;



4. Линейное преобразование стационарных процессов;
5. Простые цепи Маркова. Основные соотношения;
6. Цепи Маркова с непрерывным временем;
7. Расчет основных характеристик;
8. Непуассоновские СМО.

### **3.4. Темы лабораторных работ** не предусмотрено

### **3.5 Консультации**

#### *Групповые консультации по разделам дисциплины (ГК)*

1. Обсуждение материалов раздела "Корреляционная теория"
2. Обсуждение материалов раздела "Марковские процессы. Простые цепи"
3. Обсуждение материалов раздела "Цепи Маркова с непрерывным временем"
4. Обсуждение материалов раздела "Основы теории массового обслуживания"

### **3.6 Тематика курсовых проектов/курсовых работ** Курсовой проект/ работа не предусмотрены

### 3.7. Соответствие разделов дисциплины и формируемых в них компетенций

Запланированные результаты обучения по дисциплине (в соответствии с разделом 1)	Коды индикаторов	Номер раздела дисциплины (в соответствии с п.3.1)				Оценочное средство (тип и наименование)
		1	2	3	4	
<b>Знать:</b>						
основные уравнения для цепей Маркова с непрерывным временем	ИД-2РПК-2			+		Контрольная работа/Цепи Маркова с непрерывным временем
основные понятия теории случайных процессов	ИД-2РПК-2	+				Контрольная работа/Основы корреляционной теории
основные уравнения для цепей Маркова с дискретным временем	ИД-2РПК-2		+			Контрольная работа/Простые цепи Маркова
основные модели СМО и методы их анализа	ИД-2РПК-2				+	Расчетно-графическая работа/Анализ СМО
<b>Уметь:</b>						
применять знания при описании конкретных процессов, в том числе, анализировать СМО, построить модель СМО и проанализировать ее	ИД-3РПК-2				+	Расчетно-графическая работа/Анализ СМО
определять характеристики случайных процессов	ИД-4РПК-2	+				Контрольная работа/Основы корреляционной теории
определять предельные режимы и характеристики достижения границ для цепей Маркова с дискретным временем	ИД-4РПК-2		+			Контрольная работа/Простые цепи Маркова
определять предельные режимы и характеристики достижения границ для цепей Маркова с непрерывным временем	ИД-4РПК-2			+		Контрольная работа/Цепи Маркова с непрерывным временем

## **4. КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ)**

### **4.1. Текущий контроль успеваемости**

**8 семестр**

Форма реализации: Письменная работа

1. Анализ СМО (Расчетно-графическая работа)
2. Основы корреляционной теории (Контрольная работа)
3. Простые цепи Маркова (Контрольная работа)
4. Цепи Маркова с непрерывным временем (Контрольная работа)

Балльно-рейтинговая структура дисциплины является приложением А.

### **4.2 Промежуточная аттестация по дисциплине**

Экзамен (Семестр №8)

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих

В диплом выставляется оценка за 8 семестр.

**Примечание:** Оценочные материалы по дисциплине приведены в фонде оценочных материалов ОПОП.

## **5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **5.1 Печатные и электронные издания:**

1. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров . – 5-е изд., стер . – М. : КноРус, 2011 . – 448 с. - ISBN 978-5-406-00746-4 .;
2. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко . – 3-е изд., испр. и доп . – М. : Эдиториал УРСС, 2005 . – 400 с. - ISBN 5-484-00287-7 .;
3. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей : Учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров . – 3-е изд., стереотип . – М. : Высшая школа, 2000 . – 366 с. - ISBN 5-06-003832-7 : 37.60 .;
4. Горицкий, Ю. А. Случайные процессы и теория массового обслуживания : учебное пособие по курсу "Случайные процессы и теория массового обслуживания" по направлению "Прикладная математика" / Ю. А. Горицкий, А. А. Симушев, Нац. исслед. ун-т "МЭИ" (НИУ"МЭИ") . – М. : Изд-во МЭИ, 2018 . – 159 с. - ISBN 978-5-7046-1884-3 .  
<http://elibr.mpei.ru/elibr/view.php?id=10084>;
5. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко- "Введение в теорию массового обслуживания", Издательство: "Гос. изд-во физико-математической лит.", Москва, 1966 - (432 с.)  
<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=116245>.

### **5.2 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:**

1. СДО "Прометей";
2. Office / Российский пакет офисных программ;
3. Windows / Операционная система семейства Linux;

4. Видеоконференции (Майнд, Сберджаз, ВК и др).

### 5.3 Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

1. ЭБС "Университетская библиотека онлайн" -

[http://biblioclub.ru/index.php?page=main\\_ub\\_red](http://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red)

2. Электронная библиотека МЭИ (ЭБ МЭИ) - <http://elib.mpei.ru/login.php>

### 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Тип помещения	Номер аудитории, наименование	Оснащение
Учебные аудитории для проведения лекционных занятий и текущего контроля	М-808, Учебная аудитория	стол учебный, стул, доска меловая
	Ж-120, Машинный зал ИВЦ	сервер, кондиционер
Учебные аудитории для проведения практических занятий, КР и КП	М-710, Учебная аудитория каф. МКМ	стол преподавателя, стол учебный, стул, доска меловая
	Ж-120, Машинный зал ИВЦ	сервер, кондиционер
Учебные аудитории для проведения промежуточной аттестации	М-710а, Учебная аудитория каф. МКМ	стол, стул, доска меловая
	Ж-120, Машинный зал ИВЦ	сервер, кондиционер
Помещения для самостоятельной работы	НТБ-201, Компьютерный читальный зал	стол компьютерный, стул, стол письменный, вешалка для одежды, компьютерная сеть с выходом в Интернет, компьютер персональный, принтер, кондиционер
Помещения для консультирования	М-714, Преподавательская каф. МКМ	рабочее место сотрудника, стул, шкаф, шкаф для документов, шкаф для одежды, тумба, доска меловая, компьютерная сеть с выходом в Интернет, мультимедийный проектор, экран, книги, учебники, пособия
Помещения для хранения оборудования и учебного инвентаря	М-301/1, Кладовая	стул
	М-713/1, Учебно-научная лаборатория каф. МКМ	рабочее место сотрудника, стул, шкаф, шкаф для одежды, тумба, компьютерная сеть с выходом в Интернет, компьютер персональный, книги, учебники, пособия

**БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВАЯ СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ**

## Случайные процессы и теория массового обслуживания

(название дисциплины)

**8 семестр****Перечень контрольных мероприятий текущего контроля успеваемости по дисциплине:**

КМ-1 Основы корреляционной теории (Контрольная работа)

КМ-2 Простые цепи Маркова (Контрольная работа)

КМ-3 Цепи Маркова с непрерывным временем (Контрольная работа)

КМ-4 Анализ СМО (Расчетно-графическая работа)

**Вид промежуточной аттестации – Экзамен.**

Номер раздела	Раздел дисциплины	Индекс КМ:	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4
		Неделя КМ:	4	8	12	14
1	Корреляционная теория					
1.1	Корреляционная теория		+			
2	Марковские процессы. Простые цепи					
2.1	Марковские процессы. Простые цепи			+		
3	Цепи Маркова с непрерывным временем					
3.1	Цепи Маркова с непрерывным временем				+	
4	Основы теории массового обслуживания					
4.1	Основы теории массового обслуживания					+
Вес КМ, %:			20	30	30	20