

**Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

**Направление подготовки/специальность: 01.03.02 Прикладная математика и информатика**

**Наименование образовательной программы: Математическое и программное обеспечение  
вычислительных машин и компьютерных сетей**

**Уровень образования: высшее образование - бакалавриат**

**Форма обучения: Очная**

**Оценочные материалы  
по дисциплине  
Дифференциальные уравнения**

**Москва  
2022**

## ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Преподаватель

(должность)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Зубков П.В.
	Идентификатор	R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c

(подпись)

П.В. Зубков

(расшифровка  
подписи)

## СОГЛАСОВАНО:

Руководитель  
образовательной  
программы

(должность, ученая степень,  
ученое звание)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Маран М.М.
	Идентификатор	R7be141f2-MaranMM-804b01e2

(подпись)

М.М. Маран

(расшифровка  
подписи)

Заведующий  
выпускающей кафедры

(должность, ученая степень,  
ученое звание)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Варшавский П.Р.
	Идентификатор	R9a563c96-VarshavskyPR-efb4bbd

(подпись)

П.Р.

Варшавский

(расшифровка  
подписи)

## ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки: достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ИД-1 Демонстрирует знание терминологии, основных результатов и методов базовых дисциплин в области математических наук

ИД-2 Использует базовые знания и методы математических наук для решения прикладных задач

2. ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности

ИД-1 Использует и модифицирует математические модели прикладных задач

ИД-2 Применяет существующие математические методы для анализа свойств математических моделей

и включает:

**для текущего контроля успеваемости:**

Форма реализации: Билеты (письменный опрос)

1. Необходимые условия экстремума простейших задач вариационного исчисления (Проверочная работа)

Форма реализации: Письменная работа

1. Вариационное исчисление (Контрольная работа)

2. Дифференциальные уравнения высших порядков (Контрольная работа)

3. Линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной (Контрольная работа)

4. Методы решения краевых задач (Контрольная работа)

5. Решение систем дифференциальных уравнений и устойчивость решений (Контрольная работа)

6. Теория устойчивости (Контрольная работа)

7. Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к ним (Контрольная работа)

Форма реализации: Проверка задания

1. Дифференциальные уравнения (Расчетно-графическая работа)

## БРС дисциплины

3 семестр

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %				
	Индекс КМ:	КМ- 1	КМ- 2	КМ- 3	КМ- 4

	Срок КМ:	4	8	12	14	15
Основные понятия теории дифференциальных уравнений						
Основные понятия теории дифференциальных уравнений		+	+		+	
Дифференциальные уравнения первого порядка						
Дифференциальные уравнения первого порядка		+	+		+	
Системы дифференциальных уравнений и уравнения высокого порядка						
Системы дифференциальных уравнений и уравнения высокого порядка				+		+
Общая теория линейных систем						
Общая теория линейных систем						+
Теория устойчивости линейных систем						
Теория устойчивости линейных систем						+
	Вес КМ:	20	20	39	1	20

4 семестр

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %				
	Индекс КМ:	КМ-6	КМ-7	КМ-8	КМ-9
	Срок КМ:	4	8	12	15
Теория устойчивости нелинейных систем					
Теория устойчивости нелинейных систем		+			
Краевые задачи					
Краевые задачи			+		
Вариационное исчисление					
Вариационное исчисление				+	+
	Вес КМ:	20	20	20	40

\$Общая часть/Для промежуточной аттестации\$

## СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Индекс компетенции	Индикатор	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Контрольная точка
ОПК-1	ИД-1 <sub>ОПК-1</sub> Демонстрирует знание терминологии, основных результатов и методов базовых дисциплин в области математических наук	Знать: терминологию и основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений основы классической теории вариационного исчисления Уметь: находить решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к ним (Контрольная работа) Дифференциальные уравнения (Расчетно-графическая работа) Решение систем дифференциальных уравнений и устойчивость решений (Контрольная работа) Необходимые условия экстремума простейших задач вариационного исчисления (Проверочная работа)
ОПК-1	ИД-2 <sub>ОПК-1</sub> Использует базовые знания и методы математических наук для решения прикладных задач	Знать: основные аналитические методы решения дифференциальных уравнений Уметь: аналитически решать простейшие дифференциальные уравнения	Линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной (Контрольная работа) Дифференциальные уравнения (Расчетно-графическая работа)

ОПК-3	ИД-1 <sub>ОПК-3</sub> Использует и модифицирует математические модели прикладных задач	Знать: знает постановки краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений Уметь: аналитически решать простейшие краевые задачи	Методы решения краевых задач (Контрольная работа)
ОПК-3	ИД-2 <sub>ОПК-3</sub> Применяет существующие математические методы для анализа свойств математических моделей	Знать: необходимые условия экстремумов в задачах вариационного исчисления Уметь: правильно ставить задачу Коши и анализировать свойства ее решений анализировать устойчивость решений систем дифференциальных уравнений применять необходимые и достаточные условия экстремумов в задачах вариационного исчисления	Дифференциальные уравнения высших порядков (Контрольная работа) Теория устойчивости (Контрольная работа) Вариационное исчисление (Контрольная работа)

## II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания

### 3 семестр

**КМ-1. Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к ним**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 20

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Контрольная работа проводится по вариантам. Работа содержит 4 задания на 45 минут.

#### **Краткое содержание задания:**

Контрольная работа ориентирована на проверку знания терминологии и основных понятий теории обыкновенных дифференциальных уравнений

#### **Контрольные вопросы/задания:**

Знать: терминологию и основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений	1. Определить общий интеграл заданного дифференциального уравнения в полных дифференциалах. 2. Определить общий интеграл заданного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. 3. Определить общий интеграл заданного однородного дифференциального уравнения. 4. Определить общий интеграл заданного дифференциального уравнения, приводящегося к однородному дифференциальному уравнению.
---	--

#### **Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 70*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто. Выбрано верное направление для решения задач

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 50*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено

**КМ-2. Линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 20

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Контрольная работа проводится по вариантам. Работа содержит 4 задания на 45 минут.

**Краткое содержание задания:**

Контрольная работа ориентирована на проверку умений аналитически решать простейшие дифференциальные уравнения

**Контрольные вопросы/задания:**

Уметь: аналитически решать простейшие дифференциальные уравнения	1. Найти решение задачи Коши $2(y - y + xy) \backslash differential Dy = \backslash differential Dx, y(-2) = 0$ . 2. Найти решение задачи Коши $y - 4xy = -4x, y(0) = -0.5$ . 3. Найти решение задачи Коши $y - y = xy, y(0) = 1$ . 4. Решить уравнение методом введения параметра $y(x - lny) = 1$ .
--	--

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 70*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто. Выбрано верное направление для решения задач

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 50*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено

**КМ-3. Дифференциальные уравнения высших порядков**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 39

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Контрольная работа проводится по вариантам. Работа содержит 5 заданий на 90 минут

**Краткое содержание задания:**

Контрольная работа ориентирована на проверку умений правильно ставить задачу Коши и анализировать свойства ее решений

**Контрольные вопросы/задания:**

Уметь: правильно ставить задачу Коши и анализировать свойства ее решений	1. Найти решение задачи Коши $yy + 4 = 0, y(0) = -1, y(0) = -2$ . 2. Найти решение задачи Коши $y + y = 2ctg x, y(\frac{\pi}{2}) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 2$ .
--	--

**Описание шкалы оценивания:**

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 90

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто. Выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено

#### КМ-4. Дифференциальные уравнения

**Формы реализации:** Проверка задания

**Тип контрольного мероприятия:** Расчетно-графическая работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 1

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Расчетное задание выполняется в форме домашнего задания. Студенту необходимо решить задачи расчетного задания согласно индивидуальному варианту

**Краткое содержание задания:**

Расчетное задание ориентировано на проверку знаний основных аналитических методов решения дифференциальных уравнений

**Контрольные вопросы/задания:**

Знать: терминологию и основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений	1. Построение интегральной кривой дифференциального уравнения первого порядка методом изоклин
Знать: основные аналитические методы решения дифференциальных уравнений	1. Решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными 2. Решение однородного дифференциального уравнения 3. Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка 4. Решение уравнения Бернулли 5. Решение уравнения в полных дифференциалах 6. Решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка 7. Решение линейного дифференциального уравнения n-го порядка с правой частью специального вида 8. Решение линейного дифференциального уравнения n-го порядка методом вариации постоянных

**Описание шкалы оценивания:**

Оценка: зачтено

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "зачтено" выставляется, если задание выполнено правильно или с незначительными недочетами

Оценка: не зачтено

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "не зачтено" выставляется, если задание не выполнено в отведенный срок или результат не соответствует заданию

### **КМ-5. Решение систем дифференциальных уравнений и устойчивость решений**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 20

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Контрольная работа проводится по вариантам. Работа содержит 3 задания на 45 минут

**Краткое содержание задания:**

Контрольная работа ориентирована на проверку умений находить решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

**Контрольные вопросы/задания:**

Уметь: находить решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	<ol style="list-style-type: none"><li>1.Найти общее решение однородной системы дифференциальных уравнений <math>y = Ay</math>, где матрица коэффициентов задана.</li><li>2.Найти общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений первого порядка.</li><li>3.Пользуясь определениями устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости исследовать на устойчивость решение задачи Коши <math>y = t(y - 1), y(0) = 1</math>.</li></ol>
---	--

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 70*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто. Выбрано верное направление для решения задач

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 50*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено

**4 семестр**

### **КМ-6. Теория устойчивости**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 20

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Контрольная работа проводится по вариантам. Работа содержит 3 задания на 45 минут

**Краткое содержание задания:**

Контрольная работа ориентирована на проверку умений анализировать устойчивость решений систем дифференциальных уравнений

**Контрольные вопросы/задания:**

Уметь: анализировать устойчивость решений систем дифференциальных уравнений	1. Исследовать на устойчивость точку покоя системы по первому приближению $x = 5x + u \cos y$ , $y = 3x + 2y - ue$ . 2. Исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева $x = -x - 2y$ , $y = 3x - 4y$ . 3. Определить действительные коэффициенты $\alpha$ и $\beta$ , при которых нулевое решение асимптотически устойчиво $x = \alpha x + \beta y$ , $y = -x + 2y$ .
---	---

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно*

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 70*

*Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто. Выбрано верное направление для решения задач*

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 50*

*Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено*

**КМ-7. Методы решения краевых задач**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 20

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Контрольная работа проводится по вариантам. Работа содержит 5 заданий на 60 минут

**Краткое содержание задания:**

Контрольная работа ориентирована на проверку знания постановок краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и умения аналитически решать простейшие краевые задачи

**Контрольные вопросы/задания:**

Знать: знает постановки краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	1. Дать определение функции Грина 2. Сформулировать основные свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля 3. Привести постановки краевых задач с различными краевыми условиями
Уметь: аналитически решать простейшие краевые задачи	1. Найти решение уравнения, удовлетворяющее краевым условиям $u'' + u + u = 0$ , $u(0) =$

	<p>1, <math>y(-1) = 0</math>.</p> <p>2. Построить функцию Грина для краевой задачи <math>y - y = f(x)</math>, <math>y(0) = 0</math>, <math>y(x)</math> ограничено при <math>x + \infty</math>.</p> <p>3. Найти значения положительного параметра <math>\lambda</math>, при котором краевая задача <math>y + \lambda y = 0</math>, <math>y(0) + y(0) = 0</math>, <math>y(l) + y(l) = 0</math>, имеет нетривиальное решение.</p>
--	--

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно*

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 70*

*Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто. Выбрано верное направление для решения задач*

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 50*

*Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено*

**КМ-8. Необходимые условия экстремума простейших задач вариационного исчисления**

**Формы реализации:** Билеты (письменный опрос)

**Тип контрольного мероприятия:** Проверочная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 20

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Письменный опрос проводится по вариантам. Билет содержит 5 заданий на 20 минут

**Краткое содержание задания:**

Проверочная работа ориентирована на проверку знаний основ классической теории вариационного исчисления

**Контрольные вопросы/задания:**

<p>Знать: основы классической теории вариационного исчисления</p>	<p>1. Норма в пространстве <math>C\lbrack a, b\rbrack</math>.</p> <p>2. Определение сильно дифференцируемого в точке функционала.</p> <p>3. Формулировка необходимого условия экстремума.</p> <p>4. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера: <math>F = F(y)</math>.</p> <p>5. Постановка задачи с подвижным правым концом для простейшего функционала вариационного исчисления. Краевая задача для нахождения экстремалей задачи с подвижным правым концом (формулировка). Условие трансверсальности.</p>
---	--

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

*Оценка:* 4

*Нижний порог выполнения задания в процентах:* 70

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто

*Оценка:* 3

*Нижний порог выполнения задания в процентах:* 50

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено

## **КМ-9. Вариационное исчисление**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 40

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Контрольная работа проводится по вариантам. Работа содержит 6 заданий на 90 минут

### **Краткое содержание задания:**

Контрольная работа ориентирована на проверку знания необходимых условий экстремумов и умений применять необходимые и достаточные условия экстремумов в задачах вариационного исчисления

### **Контрольные вопросы/задания:**

Знать: необходимые условия экстремумов в задачах вариационного исчисления	1. Сформулировать условие трансверсальности для задачи с подвижными концами 2. Сформулировать необходимые условия экстремума для абстрактной изопериметрической задачи
Уметь: применять необходимые и достаточные условия экстремумов в задачах вариационного исчисления	1. Найти экстремаль задачи $\int_0^1 (y - y + 4y \sin x) dx$ , $y(0) = 0$ . 2. Найти экстремали задачи $\int_0^1 (2y + (y) - (z) + y \sin z + y \cos z \cdot z) dx$ , $y(0) = 0$ , $y(1) = \frac{3}{2}$ , $z(0) = 1$ , $z(1) = 1$ . 3. Найти экстремаль задачи $\int_0^1 (y - 2xy) dx$ , $y(0) = y(1) = 0$ . 4. Исследовать задачу $\int_0^1 (y + y + 2ye) dx$ , $y(0) = \frac{1}{3}$ , $y(1) = \frac{1}{3}e$ .

### **Описание шкалы оценивания:**

*Оценка:* 5

*Нижний порог выполнения задания в процентах:* 90

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

*Оценка:* 4

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 70*

*Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто. Выбрано верное направление для решения задач*

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 50*

*Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено*

# СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

## 3 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

### Пример билета

1. Линейное дифференциальное уравнение  $m$ -го порядка. Существование и единственность решения задачи Коши. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского и его свойства. Формула Остроградского-Лиувилля.
2. Доказать, что в случае  $q(x) < 0$  решения уравнения  $y + p(x)y + q(x)y = 0$  не могут иметь положительных максимумов.
3. Найти решение задачи Коши  $y + 16y = \frac{16}{\cos 4x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 0$

### Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. На подготовку ответа студенту дается 60 минут. Кроме ответа на вопросы билета студент должен ответить на дополнительные вопросы.

### *1. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины*

**1. Компетенция/Индикатор:** ИД-1<sub>ОПК-1</sub> Демонстрирует знание терминологии, основных результатов и методов базовых дисциплин в области математических наук

### Вопросы, задания

1. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Понятие решения, интегральной кривой. Поле направлений. Метод изоклин
2. Задача Коши для уравнения первого порядка. Связь решения задачи Коши с решением интегрального уравнения
3. Теорема Пеано о существовании решения задачи Коши
4. Теорема о единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с правой частью, удовлетворяющей локальному условию Липшица
5. Теорема Осгуда о единственности решения задачи Коши
6. Продолжение решений дифференциального уравнения
7. Теорема о гладкости решений дифференциального уравнения
8. Уравнения, не разрешенные относительно первой производной

### Материалы для проверки остаточных знаний

1. Указать общий интеграл дифференциального уравнения  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ .

Ответы:

1.  $y = f(x, C)$ ,
2.  $\Phi(x, y, C_1^1, \dots, C_n^n) = 0$ ,
3.  $y = f(x)$ ,
4.  $y = f(x, C_1^1, \dots, C_n^n)$ ,
5.  $\Phi(x, y) = 0$ .

Верный ответ: 2

2. Определить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Ответы:

1.  $y + P(x)y = Q(x)$ ,
2.  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ ,

3.  $y = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ,
4.  $M(x)N(y)\backslash differential Dx + P(x)Q(y)\backslash differential Dy = 0$ ,
5.  $y + y + y = 0$ .

Верный ответ: 4

3. Если определитель Вронского системы решений однородного линейного дифференциального уравнения равен нулю хотя бы в одной точке, то система решений

Ответы:

1. линейно независима,
2. линейно зависима.

Верный ответ: 2

**2. Компетенция/Индикатор:** ИД-2<sub>ОПК-1</sub> Использует базовые знания и методы математических наук для решения прикладных задач

### Вопросы, задания

1. Дифференциальные уравнения в симметричной форме. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель
2. Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах: уравнения с разделенными переменными, уравнения с разделяющимися переменными
3. Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах: однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним
4. Линейные уравнения первого порядка. Метод вариации постоянной
5. Уравнения Бернулли и Риккати
6. Метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро
7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения  $\sqrt{1-xy} + xy + x = 0$
8. Найти общий интеграл дифференциального уравнения  $y = \frac{x+y-4}{x-2}$
9. Найти общее решение однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами  $x = -3x + 2y + 2z$ ,  $y = -3x - y + z$ ,  $z = -x + 2y$
10. Найти общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами  $x = 2x - 4y$ ,  $y = x - 3y + 3z$

### Материалы для проверки остаточных знаний

1. Решить дифференциальное уравнение  $xy = y + x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Ответы:

1.  $C \sin\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x$ ,
2.  $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = x + C$ ,
3.  $\cos\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(Cx)$ ,
4.  $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(Cx)$ .

Верный ответ: 4

2. Какая из заданных функций является общим решением уравнения  $y = xy + y$ ?

Ответы:

1.  $y = 4x$ ,
2.  $y = Ce + x$ ,
3.  $y = C_1^1 x + C_2^2$ ,
4.  $y = Cx + C$ ,
5.  $y = C_1^1 \cos x + C_2^2 \sin x$ .

Верный ответ: 4

3. Найти общее решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений  $x = y$ ,  $y = x$ .

Ответы:

1.  $x = C_1^1 e - C_2^2 e, y = C_1^1 e + C_2^2 e,$
2.  $x = Ce, y = Ce,$
3.  $x = Ce, y = -Ce,$
4.  $x = e, y = e.$

Верный ответ: 1

4. Найти общее решение однородного линейного дифференциального уравнения  $y' + y = 0$

Ответы:

1.  $y = C_1^1 + C_2^2 e,$
2.  $y = C_1^1 + C_2^2 x + C_3^3 e,$
3.  $y = C_1^1 + C_2^2 e + C_3^3 x e,$
4.  $y = C_1^1 + C_2^2 e + C_3^3 e$

Верный ответ: 2

5. Частное решение неоднородного дифференциального уравнения  $y' + y = \cos x$  следует искать в виде

Ответы:

1.  $y = a \cos x + b \sin x,$
2.  $y = a \cos x,$
3.  $y = ax \cos x + bx \sin x,$
4.  $y = ax \sin x.$

Верный ответ: 3

**3. Компетенция/Индикатор:** ИД-2<sub>ОПК-3</sub> Применяет существующие математические методы для анализа свойств математических моделей

### Вопросы, задания

1. Найти решение задачи Коши  $3(xy + y) = xy, y(1) = 3$
2. Найти решение задачи Коши  $y + 2xy = -2x, y(1) = e$
3. Найти решение задачи Коши  $yy' + 16 = 0, y(1) = 2, y(1) = 2$
4. Найти решение задачи Коши  $y' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}, y(0) = 3, y(0) = 0$

### Материалы для проверки остаточных знаний

1. Будет ли задача Коши  $y' = 3ye + x, y(0) = 0$ , иметь единственное решение?

Ответы:

1. да,
2. нет.

Верный ответ: 1

2. Следует ли из асимптотической устойчивости точки покоя системы дифференциальных уравнений её устойчивость по Ляпунову?

Ответы:

1. нет,
2. да.

Верный ответ: 2

### II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 90

Описание характеристики выполнения знания: Работа выполнена в рамках "продвинутого" уровня. Ответы даны верно, четко сформулированные особенности практических решений

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Работа выполнена в рамках "базового" уровня. Большинство ответов даны верно. В части материала есть незначительные недостатки

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Работа выполнена в рамках "порогового" уровня. Основная часть задания выполнена верно.

### **III. Правила выставления итоговой оценки по курсу**

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих

#### **4 семестр**

**Форма промежуточной аттестации:** Экзамен

#### **Пример билета**

1. Пользуясь определениями устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости исследовать на устойчивость решение задачи Коши  $y = -ty, y(0) = 0$ .
2. Построить функцию Грина для краевой задачи  $y - y = f(x), y(0) = 0, y(1) = 0$ .
3. Задача с подвижными концами. Условие трансверсальности. Найти расстояние от точки  $M(1,1)$  до прямой  $x - 2y + 5 = 0$ , решая задачу как вариационную задачу с подвижным концом.

#### **Процедура проведения**

Экзамен проводится в письменно-устной форме. На подготовку ответа студенту дается 60 минут. Кроме ответа на вопросы билета студент должен ответить на дополнительные вопросы.

#### **I. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины**

**1. Компетенция/Индикатор:** ИД-1<sub>ОПК-1</sub> Демонстрирует знание терминологии, основных результатов и методов базовых дисциплин в области математических наук

#### **Вопросы, задания**

1. Основная лемма вариационного исчисления
2. Задача с закрепленными концами. Уравнение Эйлера
3. Задача со свободными концами. Естественные граничные условия
4. Функционалы, зависящие от нескольких функций. Необходимые условия экстремума. Система уравнений Эйлера
5. Функционалы, зависящие от старших производных. Необходимые условия экстремума. Уравнение Эйлера и естественные граничные условия
6. Классические достаточные условия экстремума для простейшей задачи вариационного исчисления. Усиленное условие Лежандра. Усиленное условие Якоби. Формулировка основной теоремы (без доказательства)
7. Классическая изопериметрическая задача. Необходимое условие экстремума. Задача Дидоны

8. Понятие о вариационных задачах на условный экстремум с голономными связями
9. Понятие о вариационных задачах на условный экстремум с неголономными связями
10. Необходимые условия локального экстремума функционала
11. Дифференцируемость простейшего функционала вариационного исчисления
12. Функционалы. Сильная и слабая дифференцируемость функционалов. Первая вариация

### Материалы для проверки остаточных знаний

1. Какое из четырех приведенных ниже уравнений является уравнением Эйлера для функционала  $J(y) = \int_0^1 (y' \sin y + y \cos y) dx$ ?

Ответы:

1.  $\frac{d}{dx} \sin y + \cos y = 0$ ,
2.  $-\frac{d}{dx} \cos y + \cos y = 0$ ,
3.  $-\frac{d}{dx} \cos y + \sin y = 0$ ,
4.  $\frac{d}{dx} \sin y + \sin y = 0$ .

Верный ответ: 2

2. В задаче со свободными концами для простейшего функционала вариационного исчисления  $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$  естественные краевые условия имеют вид

Ответы:

1.  $y(a) = y_a^a, y(b) = y_b^b$ ,
2.  $F_y^y(a, y(a), y'(a)) = 0, F_y^y(b, y(b), y'(b)) = 0$ ,
3.  $y(a) = y(b) = 0$ ,
4.  $F(a, y(a), y'(a)) = 0, F(b, y(b), y'(b)) = 0$ .

Верный ответ: 2

3. Следует ли из слабой дифференцируемости функционала сильная дифференцируемость?

Ответы:

1. да,
2. нет.

Верный ответ: 2

**2. Компетенция/Индикатор:** ИД-1<sub>ОПК-3</sub> Использует и модифицирует математические модели прикладных задач

### Вопросы, задания

1. Постановка краевых задач
2. Тождество Лагранжа. Формула Грина
3. Теорема о тривиальности решения однородной краевой задачи для уравнения  $L[u]=0$
4. Неоднородная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Представление решения с использованием функции Грина
5. Первая краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка. Принцип максимума
6. Первая краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка. Теоремы сравнения
7. Первая краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка. Априорная оценка решения
8. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций и собственных значений. Теорема Стеклова (без доказательства)

9. Неоднородная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Существование и единственность функции Грина
10. Найти решение уравнения, удовлетворяющее краевым условиям  $y - 5y + 6y = e + e$ ,  $y(0) = \frac{1}{2}$ ,  $y(1) = \frac{e}{2}$
11. Построить функцию Грина для краевой задачи  $xu - xu = f(x)$ ,  $y(x)$  ограничено при  $x \rightarrow \infty$ ,  $y(0) = 0$

### Материалы для проверки остаточных знаний

1. Какого типа краевые условия использованы в следующей краевой задаче  $-ey + (x + 1)y = x$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 0$ ?

Ответы:

1. краевые условия первого рода,
2. краевые условия второго рода,
3. краевые условия третьего рода.

Верный ответ: 2

2. Является ли функция  $G(x) = x - 1$  функцией Грина краевой задачи  $-y + y = f(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $y(-1) = 0$ ,  $y(1) = 0$ ?

Ответы:

1. является,
2. не является.

Верный ответ: 2

3. Является ли функция  $u(x) = \sin 2x$  собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля  $-u = \lambda u$ ,  $x \in [0, \pi]$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(\pi) = 0$ ?

Ответы:

1. является,
2. не является.

Верный ответ: 1

### 3. Компетенция/Индикатор: ИД-2<sub>ОПК-3</sub> Применяет существующие математические методы для анализа свойств математических моделей

#### Вопросы, задания

1. Некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера
2. Задача о брахистохроне
3. Задача с подвижными концами. Условие трансверсальности
4. Минимизация выпуклых функционалов. Основные теоремы
5. Минимизация выпуклых функционалов. Случай квадратичного функционала и функционала с функцией  $F$ , выпуклой по паре аргументов  $(y, z)$
6. Вторая вариация функционала. Необходимое условие экстремума в терминах второй вариации
7. Условие Лежандра
8. Абстрактная изопериметрическая задача. Необходимое условие экстремума
9. Лемма Дюбуа-Реймона
10. Исследовать на устойчивость точку покоя системы по первому приближению  $x = 7x + 2\sin y$ ,  $y = e - 3y - 1$
11. Исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева  $x = -2xy$ ,  $y = 3yx$
12. Исследовать задачу  $\int_0^1 (y + 2xy - (y)') dx$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$

13. Найти экстремали задачи  $\int_0^1 (y - z) + z - y + 3zyz + zy \, dx$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ,  $z(0) = 1$ ,  $z(\frac{\pi}{2}) = 0$

### Материалы для проверки остаточных знаний

1. Собственные числа матрицы линеаризованной по Тейлору (матрице первого приближения) системы 3 обыкновенных дифференциальных уравнений равны  $(0, -2, -3)$ . Нелинейная система:

Ответы:

1. неустойчива,
2. информации для решения вопроса об устойчивости недостаточно,
3. асимптотически устойчива,
4. устойчива по Ляпунову, но не является асимптотически устойчивой.

Верный ответ: 2

2. Для какого функционала, имеющего первую вариацию, необходимое условие минимума является одновременно и достаточным?

Ответы:

1. слабо дифференцируемого,
2. выпуклого,
3. сильно дифференцируемого,
4. любого.

Верный ответ: 2

3. Пусть в точке локального минимума функционала существует его вторая вариация, тогда для всех допустимых приращений вторая вариация

Ответы:

1. неотрицательна,
2. отрицательна,
3. неположительна.

Верный ответ: 1

4. Уравнением Эйлера для функционала  $J(y) = \int_a^b [(y')^2 + y + y] \, dx$  является уравнение

Ответы:

1.  $y + 1 = 0$ ,
2.  $y = 0$ ,
3.  $y = 0$ ,
4.  $2y + 1 = 0$ .

Верный ответ: 4

### II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 90

Описание характеристики выполнения знания: Работа выполнена в рамках "продвинутого" уровня. Ответы даны верно, четко сформулированные особенности практических решений

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Работа выполнена в рамках "базового" уровня. Большинство ответов даны верно. В части материала есть незначительные недостатки

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

*Описание характеристики выполнения знания:* Работа выполнена в рамках "порогового" уровня. Основная часть задания выполнена верно.

### ***III. Правила выставления итоговой оценки по курсу***

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих