

**Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

**Направление подготовки/специальность: 01.03.02 Прикладная математика и информатика**

**Наименование образовательной программы: Математическое и программное обеспечение  
вычислительных машин и компьютерных сетей**

**Уровень образования: высшее образование - бакалавриат**

**Форма обучения: Очная**

**Оценочные материалы  
по дисциплине  
Линейная алгебра и аналитическая геометрия**

**Москва  
2021**

## ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Преподаватель

(должность)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Григорьев В.П.
Идентификатор	R8e98dc34-GrigoryevVP-f53724c4	

(подпись)

В.П.  
Григорьев

(расшифровка  
подписи)

## СОГЛАСОВАНО:

Руководитель  
образовательной  
программы

(должность, ученая степень,  
ученое звание)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Маран М.М.
Идентификатор	R7be141f2-MaranMM-804b01e2	

(подпись)

М.М. Маран

(расшифровка  
подписи)

Заведующий  
выпускающей кафедры

(должность, ученая степень,  
ученое звание)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Варшавский П.Р.
Идентификатор	R9a563c96-VarshavskyPR-efb4bbd	

(подпись)

П.Р.  
Варшавский

(расшифровка  
подписи)

## ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки: достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ИД-1 Демонстрирует знание терминологии, основных результатов и методов базовых дисциплин в области математических наук

ИД-2 Использует базовые знания и методы математических наук для решения прикладных задач

и включает:

**для текущего контроля успеваемости:**

Форма реализации: Билеты (письменный опрос)

1. Линейные пространства и линейные операторы (Коллоквиум)

Форма реализации: Письменная работа

1. Евклидовы и унитарные пространства (Контрольная работа)
2. Линейные нормированные пространства (Контрольная работа)
3. Линейные пространства (Тестирование)
4. Матрицы и определители (Контрольная работа)
5. Методы аналитической геометрии (Контрольная работа)
6. Системы линейных уравнений (Контрольная работа)

Форма реализации: Проверка задания

1. Аналитическая геометрия (Расчетно-графическая работа)
2. Матрицы и системы линейных алгебраических уравнений (Расчетно-графическая работа)
3. Теория линейных операторов (Расчетно-графическая работа)
4. Теория линейных пространств (Расчетно-графическая работа)

Форма реализации: Смешанная форма

1. Матрицы и системы уравнений (Коллоквиум)

## БРС дисциплины

1 семестр

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %						
	Индекс КМ:	КМ- 1	КМ- 2	КМ- 3	КМ- 4	КМ- 5	КМ- 6
	Срок КМ:	4	8	12	12	15	16
Алгебра матриц							

Алгебра матриц	+		+	+		
Теория определителей						
Теория определителей	+		+	+		
Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений						
Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений		+	+	+		
Комплексные числа						
Комплексные числа		+	+	+		
Геометрические векторы						
Геометрические векторы					+	+
Векторная алгебра						
Векторная алгебра					+	+
Методы аналитической геометрии						
Методы аналитической геометрии					+	+
Кривые и поверхности второго порядка						
Кривые и поверхности второго порядка					+	+
Вес КМ:	20	20	38	1	20	1

2 семестр

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %						
	Индекс КМ:	КМ-7	КМ-8	КМ-9	КМ-10	КМ-11	КМ-12
	Срок КМ:	4	8	8	12	15	16
Элементы теории линейных пространств							
Элементы теории линейных пространств	+	+	+	+			
Основы теории линейных операторов							
Основы теории линейных операторов					+		+
Алгебра матриц линейных операторов							
Алгебра матриц линейных операторов					+		+
Собственные векторы линейного оператора							
Собственные векторы линейного оператора					+		+

Строение линейного оператора						
Строение линейного оператора						+
Теория линейных нормированных пространств						
Теория линейных нормированных пространств					+	
Вес КМ:	20	29	1	29	20	1

\$Общая часть/Для промежуточной аттестации\$

## СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Индекс компетенции	Индикатор	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Контрольная точка
ОПК-1	ИД-1 <sub>ОПК-1</sub> Демонстрирует знание терминологии, основных результатов и методов базовых дисциплин в области математических наук	Знать: терминологию и основные результаты теории матриц и её приложений к решению систем линейных алгебраических уравнений терминологию и основы метода аналитической геометрии терминологию теории линейных пространств Уметь: выполнять действия с матрицами	Матрицы и определители (Контрольная работа) Матрицы и системы уравнений (Коллоквиум) Матрицы и системы линейных алгебраических уравнений (Расчетно-графическая работа) Методы аналитической геометрии (Контрольная работа) Линейные пространства (Тестирование)
ОПК-1	ИД-2 <sub>ОПК-1</sub> Использует базовые знания и методы математических наук для решения прикладных задач	Знать: основные результаты теории линейных пространств и линейных операторов Уметь: решать задачи теории линейных операторов решать системы линейных алгебраических уравнений и выполнять действия с	Системы линейных уравнений (Контрольная работа) Матрицы и системы уравнений (Коллоквиум) Матрицы и системы линейных алгебраических уравнений (Расчетно-графическая работа) Методы аналитической геометрии (Контрольная работа) Аналитическая геометрия (Расчетно-графическая работа) Евклидовы и унитарные пространства (Контрольная работа) Теория линейных пространств (Расчетно-графическая работа) Линейные пространства и линейные операторы (Коллоквиум) Линейные нормированные пространства (Контрольная работа) Теория линейных операторов (Расчетно-графическая работа)

		комплексными числами применять методы аналитической геометрии при решении геометрических задач и исследовать кривые и поверхности второго порядка решать задачи теории линейных пространств находить собственные векторы линейных операторов вычислять нормы векторов и нормы операторов	
--	--	--	--

## II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания

### 1 семестр

#### КМ-1. Матрицы и определители

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 20

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Каждому студенту выдается билет, в котором содержится задание из трёх задач. На выполнение задания даётся 90 минут

#### Краткое содержание задания:

Контрольная работа ориентирована на проверку умения выполнять действия с матрицами

#### Контрольные вопросы/задания:

Уметь: выполнять действия с матрицами	1. Найти число инверсий в перестановке ( 7, 5,2,8,1,4,3,6 ) 2. Вычислить определитель третьего порядка 3. Найти произведение двух матриц
---------------------------------------	--

#### Описание шкалы оценивания:

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания:* Выполнены все три задачи. Существенных замечаний нет.

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 60*

*Описание характеристики выполнения знания:* Выполнены две задачи. Существенных замечаний нет.

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 30*

*Описание характеристики выполнения знания:* Выполнена одна задача. Существенных замечаний нет.

#### КМ-2. Системы линейных уравнений

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 20

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Каждому студенту выдается билет, в котором содержится задание из трёх задач. На выполнение задания даётся 90 минут

#### Краткое содержание задания:

Контрольная работа ориентирована на проверку умения решать системы линейных алгебраических уравнений

#### Контрольные вопросы/задания:

<p>Уметь: решать системы линейных алгебраических уравнений и выполнять действия с комплексными числами</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований</li> <li>2.Построить фундаментальную систему решений для системы</li> <li>3.Найти общее решение однородной системы системы уравнений</li> <li>4.Найти общее решение неоднородной системы системы уравнений</li> </ol>
--	---

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания:* Выполнены все три задачи. Существенных замечаний нет.

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 60*

*Описание характеристики выполнения знания:* Выполнены две задачи. Существенных замечаний нет.

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 30*

*Описание характеристики выполнения знания:* Выполнена только одна задача. Существенных замечаний нет.

**КМ-3. Матрицы и системы уравнений**

**Формы реализации:** Смешанная форма

**Тип контрольного мероприятия:** Коллоквиум

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 38

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Каждому студенту выдаётся билет, содержащий один вопрос по теории и задачу. На подготовку даётся 30 минут, после чего осуществляется устный опрос по вопросам билета. Беседа при необходимости может быть продолжена по всей программе коллоквиума.

**Краткое содержание задания:**

Контрольное мероприятие ориентировано на проверку знания терминологии и основных результатов теории матриц и её приложений к решению систем линейных алгебраических уравнений, а также умения решать системы линейных уравнений и выполнять действия с комплексными числами.

**Контрольные вопросы/задания:**

<p>Знать: терминологию и основные результаты теории матриц и её приложений к решению систем линейных алгебраических уравнений</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.Матрицы. Операции над матрицами и их свойства</li> <li>Перестановки, их свойства. Инверсии и транспозиции.</li> <li>Подстановки <math>n</math>-ой степени, их свойства. Умножение подстановок.</li> <li>Определитель, его свойства и вычисление.</li> <li>Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение.</li> <li>Теорема Лапласа .</li> <li>Формула Бине – Коши.</li> </ol>
---	---

	<p>Правило Крамера.          Обратная матрица .          Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре и следствия из нее.          Понятие о максимальной линейно независимой подсистеме системы столбцов матрицы, её свойства.          Ранг системы столбцов.          Теорема о ранге матрицы. Критерий линейной зависимости системы столбцов.          Методы вычисления ранга матрицы.          Теорема Кронекера - Капелли.          Однородные системы линейных алгебраических уравнений: свойства решений, эквивалентное преобразование системы. Условие нетривиальной совместности однородной системы.          Однородные системы линейных алгебраических уравнений: понятие о линейной зависимости системы решений, существование фундаментальной системы решений. Формула общего решения          Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений: формула общего решения.          Исследование и решение систем линейных уравнений методом Гаусса.          Комплексные числа: определение, операции над комплексными числами, их свойства.</p>
<p>Уметь: решать системы линейных алгебраических уравнений и выполнять действия с комплексными числами</p>	<p>1.Найти ранг произведения двух данных матриц          2.          Найти общее решение однородной СЛАУ          3.Найти общее решение неоднородной СЛАУ          4.Выполнить указанные действия с комплексными числами, представив ответ в алгебраической форме <math>Z_1 + Z_2; Z_2 - Z_3; Z_1 * Z_4; Z_2/Z_5</math>, если <math>Z_1 = -1 + 3i; Z_2 = -2 + 2i; Z_3 = -1 + 5i; Z_4 = 8 + 4i; Z_5 = -3 + 4i</math>.</p>

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания:* Ответы на все вопросы билета и на дополнительные вопросы были правильными. Полнота ответа в некоторых случаях инициировалась дополнительными вопросами.

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 60*

*Описание характеристики выполнения знания:* Ответ на оба вопроса билета был правильным, но полнота ответов требовала дополнительных разъяснений и вопросов.

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 30*

*Описание характеристики выполнения знания:* Ответ на теоретический вопрос оказался не содержащим полного доказательства, а практический вопрос решён положительно или теория изложена полностью, а практическая часть решена неверно

## КМ-4. Матрицы и системы линейных алгебраических уравнений

**Формы реализации:** Проверка задания

**Тип контрольного мероприятия:** Расчетно-графическая работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 1

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Расчетное задание выполняется в форме домашнего задания. Студенту необходимо решить задачи расчетного задания согласно индивидуальному варианту. Выполненные работы сдаются на проверку преподавателю.

**Краткое содержание задания:**

Контрольное мероприятие ориентировано на проверку умения выполнять действия с матрицами и решать системы линейных алгебраических уравнений

**Контрольные вопросы/задания:**

Уметь: выполнять действия с матрицами	1. Вычислить методом окаймляющих миноров ранг матрицы, если даны её строки : (2, - 1, 3, -2, 4); (4, - 2, 5, 1, 7); (2, - 1, 1, 8, 2) 2. Найти обратную данной матрице методом элементарных преобразований, если даны строки матрицы ( 1, 1, -1 ); ( 4, 2, 7 ); ( 2, 1, 4 )  3. Найти обратную матрицу методом присоединённой матрицы, если даны строки матрицы : ( 2, 1, 3 ); ( 1, 0, 4 ); ( 3, 2, 3 )
Уметь: решать системы линейных алгебраических уравнений и выполнять действия с комплексными числами	1. Решить систему линейных уравнений с помощью правила Крамера $x + 2y - 3z = 1$ ; $3x - y - 4z = 1$ ; $5x - 4y + z = 7$ . 2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса : $2x + 4y - 3z = 3$ ; $x - y + 2z = -1$ ; $5x + 2y - 4z = -5$ .

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания: Все задачи выполнены правильно и в срок*

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 70*

*Описание характеристики выполнения знания: Все задачи выполнены в срок, но имеются вычислительные ошибки*

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 50*

*Описание характеристики выполнения знания: Не все задачи выполнены в срок, и имеются вычислительные ошибки*

## КМ-5. Методы аналитической геометрии

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 20

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Каждому студенту выдается билет, в котором содержится задание из трёх задач. На выполнение задания даётся 90 минут

**Краткое содержание задания:**

Контрольная работа ориентирована на проверку знания основ методов аналитической геометрии и умения применять их при решении геометрических задач

**Контрольные вопросы/задания:**

<p>Знать: терминологию и основы метода аналитической геометрии</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.Привести различные виды уравнений прямой на плоскости</li> <li>2.Привести различные уравнений плоскости</li> <li>3.Сформулировать условие пересечения прямой с плоскостью</li> <li>4.Привести определение базиса на прямой, на плоскости, в пространстве</li> <li>5.Привести определение скалярного произведения</li> <li>6.Привести определение векторного произведения</li> <li>7.Привести определение смешанного произведения</li> </ol>
<p>Уметь: применять методы аналитической геометрии при решении геометрических задач и исследовать кривые и поверхности второго порядка</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.Привести к нормальному виду общее уравнение плоскости : <math>2x - 2y + z - 18 = 0</math>.</li> <li>2.Найти двугранные углы, образованные двумя плоскостями, заданными уравнениями : <math>6x + 3y - 2z = 0</math>; <math>x + 2y + 6z - 12 = 0</math></li> <li>3.Найти направляющий вектор прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей <math>3x - y + 2z - 7 = 0</math>; <math>x + 3y - 2z + 3 = 0</math></li> <li>4.Найти точку пересечения с плоскостью <math>x - 2y + z - 15 = 0</math> прямой, заданной параметрическими уравнениями : <math>x = -3t + 3</math> ; <math>y = 2 - t</math> ; <math>z = -1 - 5t</math></li> <li>5.Написать уравнение плоскости по трём точкам <math>M_1 ( 3 , -1 , 2 )</math> ; <math>M_2 ( 4 , -1 , -1 )</math> ; <math>M_3 ( 2 , 0 , 2 )</math></li> <li>6.Найти расстояние от точки <math>P ( -1 , 1 , 2 )</math> до плоскости, заданной уравнением <math>2x - 3y - 6z - 14 = 0</math></li> <li>7.Определить тип кривой второго порядка, составить её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат, если она задана уравнением <math>4xy - 3yz - 4x + 10y - 6z = 0</math></li> <li>8.Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение поверхности второго порядка, заданной уравнением <math>2xx + 9yy + 2zz - 4xy + 4yz - 1 = 0</math>. Определить тип этой поверхности.</li> </ol>

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания:* Выполнены все три задачи. Существенных замечаний нет.

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 60*

*Описание характеристики выполнения знания:* Выполнены две задачи. Существенных замечаний нет.

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 30*

*Описание характеристики выполнения знания:* Выполнена правильно только одна задача.

### **КМ-6. Аналитическая геометрия**

**Формы реализации:** Проверка задания

**Тип контрольного мероприятия:** Расчетно-графическая работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 1

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Расчетное задание выполняется в форме домашнего задания. Студенту необходимо решить задачи расчетного задания согласно индивидуальному варианту. Выполненные работы сдаются на проверку преподавателю.

#### **Краткое содержание задания:**

Контрольное мероприятие ориентировано на проверку умения применять методы аналитической геометрии при решении геометрических задач

#### **Контрольные вопросы/задания:**

Уметь: применять методы аналитической геометрии при решении геометрических задач и исследовать кривые и поверхности второго порядка	<ol style="list-style-type: none"><li>1.Найти координаты точки пересечения прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей. с плоскостью, заданной общим уравнением</li><li>2.Найти проекцию данной точки на плоскость, заданную общим уравнением</li><li>3.Разложить данный вектор по фиксированному базису</li><li>4.Найти кратчайшее расстояние между точками двух скрещивающихся прямых : <math>x = -5 + 3t; y = -5 + 2t; z = 1 - 2t</math> и <math>x = 9 + 6t; y = -2t; z = 2 - t</math></li><li>5.По координатам вершин треугольника ABC : A ( 1, 2 ,0) , B ( 3, 0 , -3), C ( 5, 2 ,6) вычислить его площадь</li><li>6.По координатам вершин тетраэдра ABCD : A ( 2, -1 ,1) , B ( 5, 5 ,4), C ( 3, 2 , -1), D ( 4, 1, 3) вычислить его объём</li><li>7.Найти координаты направляющего вектора прямой в пространстве, заданной как линия пересечения двух плоскостей</li><li>8.Найти величины двугранных углов, образованных двумя данными плоскостями</li><li>9.По уравнению прямой на плоскости найти её направляющий вектор</li></ol>
---	--

#### **Описание шкалы оценивания:**

*Оценка:* 5

*Нижний порог выполнения задания в процентах:* 90

*Описание характеристики выполнения знания:* Все задание выполнено правильно, существенных замечаний нет

*Оценка:* 4

*Нижний порог выполнения задания в процентах:* 70

*Описание характеристики выполнения знания:* Все задание выполнено в срок, имеются вычислительные ошибки

*Оценка:* 3

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 50*

*Описание характеристики выполнения знания: Не всё задание выполнено полностью, имеются существенные замечания*

**2 семестр**

### **КМ-7. Линейные пространства**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Тестирование

**Вес контрольного мероприятия в БРС: 20**

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Каждому студенту выдается билет, в котором содержится задание из трёх задач. На выполнение задания даётся 90 минут. В те места, предлагаемых текстов, которые отмечены многоточием, требуется вставить слова или выражения формирующие правильный ответ

#### **Краткое содержание задания:**

Контрольное мероприятие ориентировано на проверку знания определений и основных понятий теории линейных пространств и умения находить базис и размерность подпространств.

#### **Контрольные вопросы/задания:**

Знать: терминологию теории линейных пространств	1. Дайте определение базиса линейного пространства 2. Дайте определение размерности пространства 3. Связь между базисом и размерностью 4. Какое отображение называется изоморфизмом ?
---	--

#### **Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания: Выполнены все три задачи. Существенных замечаний нет.*

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 60*

*Описание характеристики выполнения знания: Выполнены две задачи. Существенных замечаний нет.*

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 30*

*Описание характеристики выполнения знания: Выполнена одна задача. Существенных замечаний нет.*

### **КМ-8. Евклидовы и унитарные пространства**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС: 29**

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Каждому студенту выдается билет, в котором содержится задание из трёх задач. На выполнение задания даётся 90 минут

#### **Краткое содержание задания:**

Контрольная работа ориентирована на проверку умения решать задачи теории линейных пространств

**Контрольные вопросы/задания:**

<p>Уметь: решать задачи теории линейных пространств</p>	<p>1. Подпространство является линейной оболочкой системы векторов <math>e_1 = \{1, 0, 1, 0\}</math>; <math>e_2 = \{1, 2, 3, 4\}</math>. Найти базис в ортогональном дополнении к этому подпространству.                  2. Доказать, что для того, чтобы вектор <math>X</math> был ортогонален линейной оболочке векторов <math>e_1, e_2, \dots, e_k</math>, необходимо и достаточно чтобы он был ортогонален каждому из этих векторов.                  3. Найти ортогональную проекцию <math>Y</math> и ортогональную составляющую <math>Z</math> вектора <math>X = \{4, -1, -3, 4\}</math> на линейное подпространство <math>L</math>, заданное как линейная оболочка следующей системы векторов: <math>a_1 = \{1, 1, 1, 1\}</math>, <math>a_2 = \{1, 2, 2, -1\}</math>, <math>a_3 = \{1, 0, 0, 3\}</math></p>
---	---

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания: Выполнены все три задачи. Существенных замечаний нет.*

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 60*

*Описание характеристики выполнения знания: Выполнены две задачи из трёх. Существенных замечаний нет.*

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 30*

*Описание характеристики выполнения знания: Выполнена одна задача из трёх. Существенных замечаний нет.*

**КМ-9. Теория линейных пространств**

**Формы реализации:** Проверка задания

**Тип контрольного мероприятия:** Расчетно-графическая работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС: 1**

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Расчетное задание выполняется в форме домашнего задания. Студенту необходимо решить задачи расчетного задания согласно индивидуальному варианту. Выполненные работы сдаются на проверку преподавателю.

**Краткое содержание задания:**

Контрольное мероприятие ориентировано на умения решать задачи теории линейных пространств

**Контрольные вопросы/задания:**

<p>Уметь: решать задачи теории линейных пространств</p>	<p>1. Найти базис в подпространстве, являющемся линейной оболочкой системы векторов                  2. Найти базис в сумме двух данных подпространств</p>
---	--

	<p>3.Найти базис в пересечении двух данных подпространств</p> <p>4.Найти базис в ортогональном дополнении к подпространству, заданному как пространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений</p>
--	--

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания: Все задание выполнено правильно, существенных замечаний нет*

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 70*

*Описание характеристики выполнения знания: Все задание выполнено в срок, имеются вычислительные ошибки*

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 50*

*Описание характеристики выполнения знания: Не все задание выполнено правильно, имеются существенные замечания*

**КМ-10. Линейные пространства и линейные операторы**

**Формы реализации:** Билеты (письменный опрос)

**Тип контрольного мероприятия:** Коллоквиум

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 29

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Каждому студенту выдаётся билет, содержащий один вопрос по теории и задачу. На подготовку даётся 30 минут, после чего осуществляется устный опрос по вопросам билета. Беседа при необходимости может быть продолжена по всей программе коллоквиума.

**Краткое содержание задания:**

Контрольное мероприятие ориентировано на проверку знания терминологии и основных результатов теории линейных пространств и линейных операторов и умения находить собственные векторы линейных операторов

**Контрольные вопросы/задания:**

<p>Знать: основные результаты теории линейных пространств и линейных операторов</p>	<p>1.Линейное пространство. Базис и размерность. Теорема о связи между базисом и размерностью. Изоморфизм линейных пространств. Теорема об изоморфизме. Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка, её базис и размерность. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерности суммы подпространств. Прямая сумма подпространств. Критерии прямой суммы Преобразование координат элемента линейного пространства при переходе к новому базису. Евклидово и унитарное пространства. Неравенство Коши - Буняковского. Неравенство треугольника. Существование в евклидовом и унитарном</p>
---	--

	<p>пространства ортонормированных базисов. Процесс ортогонализации Грама - Шмидта. Свойства ортонормированных базисов. Ортогональные и унитарные матрицы. Определитель Грама и его свойства : Ортогональное дополнение к подпространству, его свойства.</p> <p>Линейный оператор. Матрица оператора. Связь между координатами образа и прообраза. Преобразование матрицы оператора при переходе к новым базисам. Действия над линейными операторами.</p> <p>Эквивалентные и подобные матрицы. Критерий эквивалентности прямоугольных матриц. Ядро и образ оператора. Ранг и дефект линейного оператора. Ранг матрицы оператора. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора.</p> <p>Обратный оператор. Условия обратимости оператора. Матрица обратного оператора.</p> <p>Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Линейная независимость собственных векторов.</p> <p>Характеристический многочлен линейного оператора, его независимость от выбора базиса. Матрица оператора в базисе из собственных векторов. Оператор простой структуры.</p>
<p>Уметь: находить собственные векторы линейных операторов</p>	<p>1.Найдите размерность линейной оболочки системы векторов  <math>e_1 = \{3, -1, 0, 1, 4\}; e_2 = \{2, 1, -3, 0, -2\}; e_3 = \{-4, 1, 4, 0, -1\}; e_4 = \{1, 1, 1, 1, 1\};</math></p> <p>2.Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, действующего в линейном пространстве, заданного в некотором базисе квадратной матрицей.</p> <p>3.Найти ортогональное преобразование, приводящее данную квадратичную форму каноническому виду.</p>

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания: Даны полные и правильные ответы на вопросы билета. По ответам на дополнительные вопросы существенных замечаний нет.*

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 60*

*Описание характеристики выполнения знания: Даны не вполне полные, но правильные ответы на вопросы билета. По ответам на дополнительные вопросы были существенные замечания.*

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 30*

*Описание характеристики выполнения знания:* Даны не вполне полные и не все правильные ответы на вопросы билета. По ответам на дополнительные вопросы были существенные замечания.

### **КМ-11. Линейные нормированные пространства**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 20

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Каждому студенту выдается билет, в котором содержится задание из трёх задач. На выполнение задания даётся 90 минут

**Краткое содержание задания:**

Контрольная работа ориентирована на проверку умения вычислять нормы векторов и нормы операторов

**Контрольные вопросы/задания:**

Уметь: вычислять нормы векторов и нормы операторов	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Найти первую и бесконечную нормы данного вектора <math>n</math>-мерного линейного пространства</li><li>2. Вычислить спектральную норму оператора, заданного матрицей второго порядка.</li><li>3. Найти сингулярные числа оператора, заданного матрицей второго порядка</li><li>4. Найти бесконечную матричную норму оператора, если матрица этого оператора имеет заданный вид</li></ol>
--	---

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания:* Решены все три задачи, существенных замечаний нет.

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 60*

*Описание характеристики выполнения знания:* Решены две задачи из трёх, существенных замечаний нет.

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 30*

*Описание характеристики выполнения знания:* Решена одна задача из трёх предложенных.

### **КМ-12. Теория линейных операторов**

**Формы реализации:** Проверка задания

**Тип контрольного мероприятия:** Расчетно-графическая работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 1

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Расчетное задание выполняется в форме домашнего задания. Студенту необходимо решить задачи расчетного задания согласно индивидуальному варианту. Выполненные работы сдаются на проверку преподавателю.

**Краткое содержание задания:**

Контрольное мероприятие ориентировано на проверку умения решать задачи теории линейных операторов

**Контрольные вопросы/задания:**

Уметь: решать задачи теории линейных операторов	<ol style="list-style-type: none"><li>1. С помощью матрицы оператора по координатам вектора найти координаты его образа</li><li>2. Дана матрица оператора в одном базисе и дана матрица перехода к другому базису, Найти матрицу перехода в новом базисе</li><li>3. По матрице оператора найти матрицу обратного оператора</li><li>4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного своей матрицей</li><li>5. С помощью метода Грама-Шмидта баный базис преобразовать в ортогональный базис</li><li>6. Подпространство задано как линейная оболочка системы векторов. Найти базис в ортогональном дополнении</li><li>7. Матрица оператора задана в ортонормированном базисе. Найти матрицу сопряжённого оператора</li><li>8. Матрица оператора задана как квадратная матрица третьего порядка, у которой все три собственных значения различны. Найти жорданову форму этой матрицы</li><li>9. Найти первую, вторую и бесконечную матричные нормы оператора, заданного матрицей третьего порядка</li></ol>
---	---

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 90*

*Описание характеристики выполнения знания: Всё задание выполнено правильно, существенных замечаний нет*

*Оценка: 4*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 70*

*Описание характеристики выполнения знания: Все задание выполнено в срок, имеются вычислительные ошибки*

*Оценка: 3*

*Нижний порог выполнения задания в процентах: 50*

*Описание характеристики выполнения знания: Не все задание выполнено правильно, имеются существенные замечания*

# СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1		Утверждаю:
МЭИ	Кафедра М К М Дисциплина <b>Линейная алгебра и аналит. геометрия</b>	
	Институт АВТ :	
	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Матрицы. Операции сложения матриц и умножения матриц на число. Операция транспонирования матриц, её свойства.</li><li>2. Однородные системы линейных алгебраических уравнений : понятие о базисных и свободных неизвестных, условие нетривиальной совместности однородной системы.</li><li>3. Доказать, что если система столбцов матрицы <math>A_1, A_2, \dots, A_k</math> линейно независима, а система столбцов <math>A_1, A_2, \dots, A_k, B</math> линейно зависима, то столбец <math>B</math> линейно выражается через столбцы <math>A_1, A_2, \dots, A_k</math>.</li><li>4. Сформулировать, в чём заключается оптическое свойство гиперболы.</li></ol>	

## Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. На подготовку ответа даётся 60 минут. Кроме ответа на вопросы билета, студент должен ответить на дополнительные вопросы.

### *1. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины*

**1. Компетенция/Индикатор:** ИД-1<sub>ОПК-1</sub> Демонстрирует знание терминологии, основных результатов и методов базовых дисциплин в области математических наук

### Вопросы, задания

1. Матрицы, операции над ними, их свойства. Перестановки. Число различных перестановок. Инверсии и транспозиции, связь между ними. Подстановки  $n$ -ой степени, их число. Чётные и нечётные подстановки. Умножение подстановок, его свойства. Тожественная подстановка. Определитель порядка  $n$ . Свойства и вычисление определителя. Разложение определителя по строке или по столбцу.

Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение.  
 Теорема Лапласа.  
 Формула Бине – Коши  
 Правило Крамера.  
 Обратная матрица .  
 Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Следствия из теоремы о базисном миноре  
 Теорема о ранге матрицы. Критерий линейной зависимости системы столбцов.  
 Вычисление ранга матрицы  
 Теорема Кронекера - Капелли.  
 Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Свойства решений, эквивалентное преобразование системы. Базисные и свободные неизвестные, условие нетривиальной совместности. Линейная зависимость решений, существование фундаментальной системы решений. Формула общего решения.  
 Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений, формула общего решения.  
 Исследование и решение систем линейных уравнений методом Гаусса.  
 Комплексные числа, формы записи, операции с комплексными числами.  
 Многочлены, их свойства Теорема Безу. Теорема Виета. Основная теорема алгебры и её следствия. Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на множители.  
 Геометрические векторы, операции над ними, свойства операций. Линейная зависимость векторов, её геометрический смысл.  
 Разложение вектора по базису. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме.  
 Прямоугольная декартова система координат. Определение координат вектора по координатам начала и конца ; нахождение расстояния между двумя точками, деление отрезка в заданном отношении.  
 Проекция вектора на ось, её свойства  
 Скалярное произведение векторов, его свойства.  
 Векторное произведение векторов, его свойства.  
 Смешанное произведение векторов, его свойства.  
 Преобразование прямоугольной декартовой системы координат на плоскости.  
 Различные виды уравнений прямой на плоскости.  
 Преобразование прямоугольной декартовой системы координат в пространстве.  
 Различные виды уравнений плоскости.  
 Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Угол между плоскостями.  
 Различные виды уравнений прямой в пространстве.  
 Взаимное расположение двух прямых в пространстве.  
 Эллипс. Вывод канонического уравнения, исследование его формы. Директрисы эллипса, их свойство. Оптическое свойство эллипса.  
 Гипербола. Вывод канонического уравнения, исследование её формы. Директрисы гиперболы, их свойство. Оптическое свойство гиперболы .  
 Парабола. Вывод канонического уравнения, исследование её формы. Оптическое свойство параболы.  
 Эллипсоид : его каноническое уравнение, форма и расположение в канонической системе координат.  
 Гиперболоиды : их канонические уравнения, форма и расположение в канонической системе координат.  
 Конус : его каноническое уравнение, форма и расположение в канонической системе координат.

Параболоиды : их канонические уравнения, форма и расположение в канонической системе координат.

Цилиндры : их канонические уравнения, форма и расположение в канонической системе координат.

2. Вычислить данный определитель.

Найти обратную к данной матрице второго порядка

Вычислить ранг данной матрицы и указать базисный минор.

### Материалы для проверки остаточных знаний

1.

1. 1) Подсчитать число инверсий в перестановке  $(1, 4, 7, \dots, 3n-2, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n)$

Ответы:

$n(n+1)/2, n(2n+1), n(n-1)/2, 3n(n-1)/2, 3n(n+1)/2$

Верный ответ:  $3n(n-1)/2$

- 2.2) Вычислить определитель порядка  $n$ , элементы которого имеют вид :  $a(i,j) = \min(i,j)$ .

Ответы:

$n; n-1; 2n-3; 1; -1; 0$

Верный ответ: 1

- 3.3) Вычислить определитель IV порядка, строки которого имеют вид :  $(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)$ ,

Ответы:

$0, -1, -3, 2, -4, 1$

Верный ответ: -3

- 4.4) Найти матрицу  $B$ , обратную к матрице  $A$ , строки которой  $(3, 2)$  и  $(4, 3)$

Ответы:

$B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Верный ответ:  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

- 5.5) Вычислить ранг матрицы, строки которой приведены ниже :  $(1, -3, 2, 4), (-3, 2, 1, 0), (-1, -4, 5, 8)$

Ответы:

$1; 2; 3; 4;$

Верный ответ: 2

- 6.6) Найти фундаментальную систему решений данной системы уравнений :

$x + y + z = 0; 3x + 3y + 3z = 0$

Ответы:

$[(1, 1, -2), (1, 1, 0), (-2, 1, 3)]; [(1, -2, 1), (-2, 1, 1), (1, 1, -2)]; [(0, 0, 0), (-3, 2, 1)];$

$[(1, -3, 0), (1, -3, 2)], [(1, -1, 0), (0, 1, -1)]$

Верный ответ:  $[(1, -1, 0), (0, 1, -1)]$

- 7.10) Доказать, что векторы  $e_1 = \{1, 1, 1\}, e_2 = \{0, 1, 1\}, e_3 = \{0, 0, 1\}$  образуют базис. Найти

разложение вектора  $X = \{2, 3, -1\}$  по этому базису

Ответы:

$X = 2e_1 - 4e_2 + 5e_3; X = 3e_1 - 4e_2 + 2e_3; X = 2e_1 + 3e_2 - 4e_3;$

$X = 4e_1 + 3e_2 + e_3; X = 2e_1 + e_2 - 4e_3$

Верный ответ:  $X = 2e_1 + e_2 - 4e_3$

- 8.11) Вычислить площадь треугольника ABC по координатам его вершин :

$A(1, 2, 0), B(3, 0, -3), C(5, 2, 6)$

Ответы:

8, 10, 12, 14, 16

Верный ответ: 14

9.12) Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах  $a = \{ 5, -3, 2 \}$ ,  
 $b = \{ 1, 4, -1 \}$ ,  $c = \{ 3, 2, 0 \}$

Ответы:

3, 12, 5, 1, 2

Верный ответ: 1

10.16) Найти расстояние от точки  $M(-3, -7, -3)$  до плоскости, заданной уравнением  
 $2x - 2y - z + 16 = 0$

Ответы:

3, 7, 9, 12, 14

Верный ответ: 9

11.17) Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением  
 $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$

Ответы:

Эллипсоид . Однополостный гиперболоид. Двуполостный гиперболоид.;  
Гиперболический параболоид. Конус.

Верный ответ: Конус

**2. Компетенция/Индикатор:** ИД-2<sub>ОПК-1</sub> Использует базовые знания и методы математических наук для решения прикладных задач

### Материалы для проверки остаточных знаний

1.7) Найти общее решение следующей однородной системы :  $x + 2y + 3z = 0$ ,  
 $x + y + z = 0$ ,  $2x + 3y + 4z = 0$

Ответы:

[  $C_1(-2, 1, 1) + C_2(1, -2, 1)$ ]; [  $C_1(-2, 1, 1)$  ] ;

[  $C_1(-3, 1, 2) + C_2(2, -3, 1)$ ]; [  $C_1(1, -2, 1)$ ]; [  $C_1(2, -1, -1) + C_2(2, -2, 0)$ ];

Верный ответ: [  $C_1(1, -2, 1)$  ]

2.8) Найти общее решение следующей неоднородной системы :  $x + 2y = -1$ ,  
 $2x + 5y - 3z = -7$ ,  $4x + 9y - 3z = -9$

Ответы:

[ $C_1(-3, 1, 0) + C_2(6, 2, 1) + (0, -1, 0)$ ]; [ $C_1(2, 1, 4) + C_2(6, -3, -1) + (8, -1, 3)$ ];

[ $C_1(-3, 2, 1) + (8, -2, 0)$ ]; [ $C_1(-6, 3, 1) + (9, -5, 0)$ ]; [ $C_1(-3, 1, 0) + (7, -5, 0)$ ];

Верный ответ: [ $C_1(-6, 3, 1) + (9, -5, 0)$  ]

3.9) Выполнить следующие действия с комплексными числами:  $Z_1 - Z_2$ ;  $Z_1/Z_3$ , если  
 $Z_1 = 1 - 3i$ ;  $Z_2 = 2 + i$ ;  $Z_3 = 3 + 4i$

Ответы:

$Z_1 - Z_2 = -1 + 4i$ ;  $Z_1/Z_3 = -7/25 - i11/25$

$Z_1 - Z_2 = -1 - 4i$ ;  $Z_1/Z_3 = -9/25 - i13/25$

$Z_1 - Z_2 = -1 - 3i$ ;  $Z_1/Z_3 = 8/25 - i6/25$

$Z_1 - Z_2 = -2 - 4i$ ;  $Z_1/Z_3 = -4/25 - i21/25$

$Z_1 - Z_2 = 1 + 6i$ ;  $Z_1/Z_3 = -18/25 - i19/25$

Верный ответ:  $Z_1 - Z_2 = -1 - 4i$ ;  $Z_1/Z_3 = -9/25 - i13/25$

4.13) Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки :  
 $A(-1, 2, 0)$ ,  $B(4, 1, 3)$ ,  $C(-2, 0, 3)$

Ответы:

$3x - 4y + 12z - 37 = 0$ ;  $4x - 7y + 11z - 7 = 0$ ;  $5x + 12y + 2z - 10 = 0$ ;

$3x - 18y - 11z + 39 = 0$ ;  $7x + 5y + 6z - 41 = 0$ ;

Верный ответ:  $3x - 18y - 11z + 39 = 0$

5.14) Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости, заданной уравнением

$5x - 2y + 6z - 12 = 0$  и проходящей через точку  $M(2, -3, 1)$

Ответы:

$7x - 3y + 4z - 11 = 0$ ;  $3x - 7y + 2z - 21 = 0$ ;  $x - 5y + 3z - 32 = 0$

$5x - 2y + 6z - 22 = 0$ ;  $3x - y + 5z - 12 = 0$

Верный ответ:  $5x - 2y + 6z - 22 = 0$

6.15) Найти точку пересечения  $M$  прямой, заданной уравнениями  $x = -3 + t$ ;  $y = 2 + t$ ;  $z = -2 + 2t$ , с плоскостью, заданной уравнением  $x + 2y - z - 5 = 0$

Ответы:

$M(1, 6, 3)$ ;  $M(-2, 3, 2)$ ;  $M(-1, 4, 2)$ ;  $M(2, 3, 1)$ ;  $M(1, -3, 2)$ ;

Верный ответ:  $M(-1, 4, 2)$

## II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 90

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "ОТЛИЧНО" выставляется студенту, правильно выполнившему практическое задание, который показал при ответе на вопросы экзаменационного билета и на дополнительные вопросы, что владеет материалом изученной дисциплины, сводно применяет свои знания для объяснения различных явлений и решения задач

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "ХОРОШО" выставляется студенту, правильно выполнившему практическое задание и в основном правильно ответившему на вопросы экзаменационного билета и на дополнительные вопросы, но допустившему при этом не принципиальные ошибки

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО" выставляется студенту, который в ответах на вопросы экзаменационного билета допустил существенные и даже грубые ошибки, но затем исправил их сам, а также не выполнил практическое задание из экзаменационного билета, но либо наметил правильный путь его выполнения, либо по указанию экзаменатора решил другую задачу из того же раздела дисциплины

## III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих

2 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

	<b>ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ</b>	<i>Утверждаю :</i>
	Кафедра <b>МКМ</b>	
<b>М Э И</b>	Дисциплина <b>ЛА и АГ</b>	

	Институт	
<p>1. Операторный многочлен, его свойства. Существование у оператора инвариантного подпространства размерности <math>(m - 1)</math>.</p> <p>2. Норма линейного оператора . Подчинённая норма и её свойства.</p> <p>3. Найти жорданову форму данной матрицы :</p> <p>4. Какое отображение называется изоморфизмом ?</p>		

### Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. На подготовку ответа даётся 60 минут. Кроме ответа на вопросы билета, студент должен ответить на дополнительные вопросы.

### *1. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины*

**1. Компетенция/Индикатор:** ИД-1<sub>ОПК-1</sub> Демонстрирует знание терминологии, основных результатов и методов базовых дисциплин в области математических наук

### Материалы для проверки остаточных знаний

1.

- 1) Найти размерность подпространства  $S$   $n$ -мерного координатного пространства, координаты векторов которого связаны соотношениями :  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0$  ;  $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = 0$ .

Ответы:

$$\dim(S) = n; \quad \dim(S) = n - 1; \quad \dim(S) = n - 2; \quad \dim(S) = n - 3;$$

Верный ответ:  $\dim(S) = n - 2$

2. 3) Подпространство  $L_1$  является линейной оболочкой системы векторов  $\mathbf{A}_1 = (1, 2, 0, -1)$  ;  $\mathbf{A}_2 = (1, 1, 1, 0)$  а подпространство  $L_2$  является линейной оболочкой системы векторов  $\mathbf{B}_1 = (1, 0, 1, 0)$  ;  $\mathbf{B}_2 = (1, 3, 0, 1)$  . Найти размерность суммы  $S$  этих подпространств.

Ответы:

$$\dim(S) = 1; \quad \dim(S) = 2; \quad \dim(S) = 3; \quad \dim(S) = 4$$

Верный ответ:  $\dim(S) = 3$

3. 4) Подпространство  $L_1$  является линейной оболочкой системы векторов  $\mathbf{A}_1 = (4, 3, 9, 1, -3)$  ;  $\mathbf{A}_2 = (2, -2, 5, 4, 0)$  , а подпространство  $L_2$  является линейной оболочкой системы векторов  $\mathbf{B}_1 = (2, 3, -3, 1, 7)$  ;  $\mathbf{B}_2 = (1, 2, -3, 7, 1)$  ;  $\mathbf{B}_3 = (1, 2, -2, 3, -8)$  . Найти размерности подпространств  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_1 + L_2$  и выяснить, является ли сумма этих подпространств прямой суммой.

Ответы:

1. 1)  $\dim(L_1) = 2$ ;  $\dim(L_2) = 2$ ;  $\dim(L_1 + L_2) = 5$ ; Сумма не прямая.  
2)  $\dim(L_1) = 1$ ;  $\dim(L_2) = 3$ ;  $\dim(L_1 + L_2) = 4$ ; Сумма прямая.

- 3)  $\dim(L1) = 2$ ;  $\dim(L2) = 3$ ;  $\dim(L1 + L2) = 5$ ; Сумма прямая.  
 4)  $\dim(L1) = 1$ ;  $\dim(L2) = 2$ ;  $\dim(L1 + L2) = 2$ ; Сумма не прямая.

Верный ответ: 4)  $\dim(L1) = 2$ ;  $\dim(L2) = 3$ ;  $\dim(L1 + L2) = 5$ ; Сумма прямая.

4. 6) Подпространство  $L1$  является линейной оболочкой системы векторов  $\mathbf{A1} = (5, 4, 6, 1, 8)$ ;  $\mathbf{A2} = (4, -2, 4, -3, 7)$ , а подпространство  $L2$  является линейной

оболочкой системы векторов  $\mathbf{B1} = (3, 5, 5, 4, 6)$ ;  $\mathbf{B2} = (2, -1, 3, 0, 5)$ .

Найти базис в пересечении этих подпространств.

Ответы:

1. 1)  $e1 = \{1, 1, 1, -1\}$ ;  $e2 = \{1, 0, 1, -1\}$ ;
2. 2)  $e1 = \{1, -1, 1, -1\}$ ;
3. 3)  $e1 = \{0, 0, 1, 1\}$ ;  $e2 = \{1, 1, 0, -1\}$ ;
4. 4)  $e1 = \{1, -2, 3, 4\}$
- 5.

Верный ответ: 2)  $e1 = \{1, -1, 1, -1\}$ ;

5. 7) Линейное пространство  $L$  – это множество решений однородной системы уравнений:

$$\begin{aligned} 2X + 7Y - 3Z &= 0 \\ 5X + 4Y + Z &= 0 \\ X - 10Y + 7Z &= 0 \end{aligned}$$

Найти базис в ортогональном дополнении  $L^\perp$ .

Ответы:

1. 1)  $e1 = \{2, 7, -3\}$ ;  $e2 = \{10, -12, 1\}$ ;
2. 2)  $e1 = \{2, 7, -3\}$ ;  $e2 = \{5, 4, 1\}$ ;
3. 3)  $e1 = \{1, 4, 5\}$ ;  $e2 = \{1, -1, 0\}$ ;
4. 4)  $e1 = \{7, 11, -2\}$ ;  $e2 = \{1, -10, 7\}$ ;

Верный ответ: 4)  $e1 = \{7, 11, -2\}$ ;  $e2 = \{1, -10, 7\}$ ;

6. 8) Вычислить определитель Грама данной системы векторов и решить вопрос о её линейной зависимости:  $\mathbf{A1} = (3, -2, 1, 0, 5)$ ;  $\mathbf{A2} = (1, -3, 5, 4, -1)$ ;  $\mathbf{A3} = (1, 4, -9, -8, 7)$ ,

если координаты векторов даны в ортонормированном базисе.

Ответы:

1. 1) Определитель Грама равен  $1 > 0$ , система векторов линейно независима ;  
 1. 2) Определитель Грама равен  $0$ , система векторов линейно независима ;
2. 3) Определитель Грама равен  $-1 < 0$ , система векторов линейно зависима ;
3. 4) Определитель Грама равен  $0$ , система векторов линейно зависима ;

Верный ответ: 4) Определитель Грама равен  $0$ , система векторов линейно зависима ;

7. 9) Для базиса  $\mathbf{e1} = (8, 7, 4)$ ;  $\mathbf{e2} = (9, 8, 7)$ ;  $\mathbf{e3} = (9, 8, 6)$ , координаты которого даны в

некотором ортонормированном базисе, найти двойственный базис.

Ответы:

1. 1)  $g1 = \{8, -9, 0\}$ ,  $g2 = \{10, -12, 1\}$ ,  $g3 = \{-17, 29, -1\}$ ;
2. 2)  $g1 = \{-1, 1, 0\}$ ,  $g2 = \{9, -1, 1\}$ ,  $g3 = \{7, 2, -1\}$ ;
3. 3)  $g1 = \{1, -1, 3\}$ ,  $g2 = \{6, -4, 1\}$ ,  $g3 = \{5, 12, -19\}$ ;
4. 4)  $g1 = \{21, -7, 4\}$ ,  $g2 = \{8, -2, 3\}$ ,  $g3 = \{4, 1, -5\}$ ;

Верный ответ: 1)  $g_1 = \{ 8, -9, 0 \}$ ,  $g_2 = \{ 10, -12, 1 \}$ ,  $g_3 = \{ -17, 29, -1 \}$ ;

8. 11) Найти жорданову форму данной матрицы, строки которой имеют вид:  $(7, 3)$ ,  $(-3, 1)$

Ответы:

- 1) строки матрицы  $(3 \ 0)$ ,  $(0 \ 5)$ ;
- 2) строки матрицы  $(3 \ 1)$ ,  $(0 \ 3)$ ;
- 3) строки матрицы  $(4 \ 0)$ ,  $(0 \ 4)$ ;
- 4) строки матрицы  $(4 \ 1)$ ,  $(0 \ 4)$ ;

Верный ответ: 4) строки матрицы  $(4 \ 1)$ ,  $(0 \ 4)$ ;

9. 13) Для кривой второго порядка, заданной уравнением  $9x^2 - 16y^2 - 6x + 8 - 144 = 0$ , составить каноническое уравнение и определить тип кривой

Ответы:

- 1) кривая парабола;  $(x^2)/18 - (y^2)/9 = 1$
- 2) кривая гипербола;  $(x^2)/18 - (y^2)/4 = 1$
- 3) кривая эллипс;  $(x^2)/18 + (y^2)/9 = 1$
- 4) кривая гипербола;  $(x^2)/16 - (y^2)/4 = 1$

Верный ответ: 4) кривая гипербола;  $(x^2)/16 - (y^2)/4 = 1$

10.14) Найти первую и бесконечную матричные нормы линейного оператора, заданного матрицей, строки которой имеют вид:  $(5, 2, -7)$ ,  $(-1, 4, 8)$ ,  $(3, 9, 1)$ .

Ответы:

- 1) первая норма = 13 ; бесконечная норма = 19;
- 2) первая норма = 16 ; бесконечная норма = 14;
- 3) первая норма = 14 ; бесконечная норма = 16;
- 4) первая норма = 19 ; бесконечная норма = 13;

Верный ответ: 2) первая норма = 16 ; бесконечная норма = 14;

**2. Компетенция/Индикатор:** ИД-2<sub>ОПК-1</sub> Использует базовые знания и методы математических наук для решения прикладных задач

### Вопросы, задания

1.

- 1) Будет ли линейный оператор  $A: R^3 \rightarrow R^3$ , имеющий в некотором базисе матрицу, заданную по строкам:  $(4, -3, 1)$ ,  $(2, 5, -4)$ ,  $(8, 1, -1)$ , осуществлять изоморфизм?

2) Найти размерность подпространства, являющегося линейной оболочкой следующей

системы векторов:  $A_1 = (2, 11, 2, 3, -8)$ ;  $A_2 = (0, -4, 2, 0, 2)$ ;  $A_3 = (1, 1, 0, 5, -4)$ ;  $A_4 = (1, 6, 4, -2, -2)$ .

3) Подпространство  $L_1$  является линейной оболочкой системы векторов

$A_1 = (3, -3, 2, 2, -1)$ ;  $A_2 = (-3, -1, 0, 1, 2)$ ;  $A_3 = (0, -4, 2, 3, 1)$ , а подпространство

$L_2$  яв-

ляется линейной оболочкой системы векторов  $B_1 = (-1, 4, 6, 1, 0)$ ;  $B_2 = (3, 7, -1, 2, 5)$ .

Найти размерность суммы этих подпространств.

4) Подпространство  $L_1$  является линейной оболочкой системы векторов

$A_1 = (3, -3, 2, 2, -1)$ ;  $A_2 = (-3, -1, 0, 1, 2)$ ;  $A_3 = (0, -4, 2, 3, 1)$ , а подпространство

$L_2$  яв-

ляется линейной оболочкой системы векторов  $B_1 = (-1, 4, 6, 1, 0)$ ;  $B_2 = (3, 7, -1, 2, 5)$ .

Найти размерность суммы этих подпространств.

5) Для базиса  $e_1 = (8, 7, 4)$ ;  $e_2 = (9, 8, 7)$ ;  $e_3 = (9, 8, 6)$ , координаты которого даны в

некотором ортонормированном базисе, найти двойственный базис.

6) Выяснить, будут ли подобны матрицы, заданные строками  $(5, 4)$ ,  $(3, 2)$  и  $(2, 3)$ ,  $(4, 5)$ .

7) Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного

в некотором базисе следующей матрицей, заданной строками:  $(5, 4)$ ,  $(1, 2)$

8) Доказать, что если оператор  $A$  – простой структуры, то его образ и ядро не содержат

общих ненулевых векторов.

9) Найти жорданову форму данной матрицы, заданной строками:  $(7, 2)$ ,  $(2, 4)$ .

10) Пусть  $A$  - нормальный оператор. Доказать, что для любого многочлена  $F(z)$  операторный многочлен  $F(A)$  также будет нормальным оператором.

2. Теорема о связи между базисом и размерностью.

Теорема об изоморфизме линейных пространств.

Теорема о размерности суммы двух подпространств.

Неравенство Коши-Буняковского для евклидова пространства.

Неравенство треугольника для унитарного пространства.

Свойства ортонормированных базисов

Матрица линейного оператора, действующего в пространстве  $X$ , при переходе к новому базису.

Критерий эквивалентности двух матриц одинакового размера.

Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора.

Закон инерции квадратичных форм

Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

### Материалы для проверки остаточных знаний

1. 2) Найти размерность подпространства  $S$ , являющегося линейной оболочкой следующей

системы векторов:  $A_1 = (2, 11, 2)$ ;  $A_2 = (0, -4, 2)$ ;  $A_3 = (2, 7, 4)$ ;  $A_4 = (2, 15, 0)$ .

Ответы:

$\dim(S) = 1$ ;  $\dim(S) = 2$ ;  $\dim(S) = 3$ ;  $\dim(S) = 4$ ;

Верный ответ:  $\dim(S) = 2$

2. 5) Подпространство  $L_1$  является линейной оболочкой системы векторов

$A_1 = (3, -3, 2, 2, -1)$ ;  $A_2 = (-3, -1, 0, 1, 2)$ ;  $A_3 = (0, -4, 2, 3, 1)$ , а подпространство

$L_2$  яв-

ляется линейной оболочкой системы векторов  $B_1 = (-1, 4, 6, 1, 0)$ ;  $B_2 = (3, 7, -1, 2,$

$5)$ .

Найти размерность суммы этих подпространств.

Ответы:

1. 1)  $\dim(L_1 + L_2) = 5$ ; 2)  $\dim(L_1 + L_2) = 4$ ; 3)  $\dim(L_1 + L_2) = 3$ ; 4)  $\dim(L_1 + L_2) = 2$ ;

Верный ответ: 2)  $\dim(L_1 + L_2) = 4$

3. 10) Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного

в некотором базисе следующей матрицей, строки которой имеют вид  $(5, 4)$  и  $(1, 2)$

Ответы:

1. 1) Собственные значения  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 6$ ; и собственные векторы  $e_1 = \{1, -1\}$ ,  $e_2 = \{4, 1\}$ ,
2. 2) Собственные значения  $L_1 = 2$ ,  $L_2 = 5$ ; и собственные векторы  $e_1 = \{2, -5\}$ ,  $e_2 = \{3, -1\}$ ,
3. 3) Собственные значения  $L_1 = 3$ ,  $L_2 = 4$ ; и собственные векторы  $e_1 = \{3, -2\}$ ,  $e_2 = \{6, -7\}$ ,
4. 4) Собственные значения  $L_1 = 4$ ,  $L_2 = 3$ ; и собственные векторы  $e_1 = \{4, -1\}$ ,  $e_2 = \{5, 4\}$ ,

Верный ответ: 1) Собственные значения  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 6$ ; и собственные векторы  $e_1 = \{1, -1\}$ ,  $e_2 = \{4, 1\}$ ,

4. 12) Найти канонический вид квадратичной формы

$7X_1^2 + 7X_2^2 + 7X_3^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_3 + 2X_2X_3$ , к которому она приводится

посредством ортогонального преобразования переменных.

Ответы:

1. 1)  $3Y_1^2 - 2Y_2^2 + 6Y_3^2$ ;
2. 2)  $4Y_1^2 + 2Y_2^2 + 5Y_3^2$ ;
3. 3)  $6Y_1^2 + 6Y_2^2 + 9Y_3^2$ ;
4. 4)  $3Y_1^2 - 4Y_2^2 - 8Y_3^2$ ;

Верный ответ: 3)  $6Y_1^2 + 6Y_2^2 + 9Y_3^2$ ;

## II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 90

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "ОТЛИЧНО" выставляется студенту, правильно выполнившему практическое задание, который показал при ответе на вопросы экзаменационного билета и на дополнительные вопросы, что владеет материалом изученной дисциплины, сводно применяет свои знания для объяснения различных явлений и решения задач

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "ХОРОШО" выставляется студенту, правильно выполнившему практическое задание и в основном правильно ответившему на вопросы экзаменационного билета и на дополнительные вопросы, но допустившему при этом принципиальные ошибки

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО" выставляется студенту, который в ответах на вопросы экзаменационного билета допустил существенные и даже грубые ошибки, но затем исправил их сам, а также не выполнил практическое задание из экзаменационного билета, но либо наметил правильный путь его выполнения, либо по указанию экзаменатора решил другую задачу из того же раздела дисциплины

## III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих