

**Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

**Направление подготовки/специальность: 01.04.02 Прикладная математика и информатика**

**Наименование образовательной программы: Математическое и компьютерное моделирование**

**Уровень образования: высшее образование - магистратура**

**Форма обучения: Очная**

**Оценочные материалы  
по дисциплине  
Прикладной функциональный анализ**

**Москва  
2022**

## ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Преподаватель

(должность)

|  |                                                    |                                |
|--|----------------------------------------------------|--------------------------------|
|  | Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» |                                |
|  | Сведения о владельце ЦЭП МЭИ                       |                                |
|  | Владелец                                           | Боровиков И.А.                 |
|  | Идентификатор                                      | R2e186edb-BorovikovIA-68185ef6 |

(подпись)

И.А.

Боровиков

(расшифровка  
подписи)

## СОГЛАСОВАНО:

Руководитель  
образовательной  
программы

(должность, ученая степень, ученое  
звание)

|  |                                                    |                               |
|--|----------------------------------------------------|-------------------------------|
|  | Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» |                               |
|  | Сведения о владельце ЦЭП МЭИ                       |                               |
|  | Владелец                                           | Черепова М.Ф.                 |
|  | Идентификатор                                      | R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1 |

(подпись)

М.Ф.

Черепова

(расшифровка  
подписи)

Заведующий  
выпускающей кафедры

(должность, ученая степень, ученое  
звание)

|  |                                                    |                             |
|--|----------------------------------------------------|-----------------------------|
|  | Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» |                             |
|  | Сведения о владельце ЦЭП МЭИ                       |                             |
|  | Владелец                                           | Зубков П.В.                 |
|  | Идентификатор                                      | R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c |

(подпись)

П.В. Зубков

(расшифровка  
подписи)

## ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки: достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. ПК-1 Способен разрабатывать и исследовать математические модели естествознания и технологий, а также осуществлять их компьютерную реализацию

ИД-1 Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании

и включает:

для текущего контроля успеваемости:

Форма реализации: Письменная работа

1. Интеграл Римана–Стилтьеса и абсолютно непрерывные функции (Контрольная работа)
2. Пространства Соболева и элементы теории обобщённых функций (Контрольная работа)
3. Функции монотонные и ограниченной вариации (Тестирование)
4. Элементы нелинейного функционального анализа (Контрольная работа)

## БРС дисциплины

1 семестр

| Раздел дисциплины                                             | Веса контрольных мероприятий, % |      |      |      |      |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------|------|------|------|------|
|                                                               | Индекс КМ:                      | КМ-1 | КМ-2 | КМ-3 | КМ-4 |
|                                                               | Срок КМ:                        | 4    | 8    | 12   | 16   |
| Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции |                                 |      |      |      |      |
| Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции |                                 | +    | +    |      |      |
| Пространства Соболева функций одной действительной переменной |                                 |      |      |      |      |
| Пространства Соболева функций одной действительной переменной |                                 |      |      | +    |      |
| Введение в теорию обобщённых функций                          |                                 |      |      |      |      |
| Введение в теорию обобщённых функций                          |                                 |      |      | +    |      |
| Элементы нелинейного функционального анализа                  |                                 |      |      |      |      |
| Элементы нелинейного функционального анализа                  |                                 |      |      |      | +    |
| Вес КМ:                                                       |                                 | 15   | 25   | 40   | 20   |

\$Общая часть/Для промежуточной аттестации\$

## СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### *I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций*

| Индекс компетенции | Индикатор                                                                                                                                      | Запланированные результаты обучения по дисциплине                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Контрольная точка                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ПК-1               | ИД-1 <sub>ПК-1</sub> Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании | <p>Знать:</p> <p>терминологию и элементы теории обобщённых функций</p> <p>терминологию и основные результаты теории функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций</p> <p>Уметь:</p> <p>применять базовые результаты нелинейного функционального анализа</p> <p>применять теорию пространств Соболева</p> <p>функций одной действительной переменной</p> | <p>Функции монотонные и ограниченной вариации (Тестирование)</p> <p>Интеграл Римана–Стилтьеса и абсолютно непрерывные функции (Контрольная работа)</p> <p>Пространства Соболева и элементы теории обобщённых функций (Контрольная работа)</p> <p>Элементы нелинейного функционального анализа (Контрольная работа)</p> |

## **II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания**

### **КМ-1. Функции монотонные и ограниченной вариации**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Тестирование

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 15

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Тестирование проводится во время планового практического занятия и состоит из 7 вопросов. Для написания работы студенту даётся 20 минут.

#### **Краткое содержание задания:**

Тестирование проверяет знание студентом терминологии и основных результатов теории функций, касающихся функций ограниченной вариации.

#### **Контрольные вопросы/задания:**

|                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Знать: терминологию и основные результаты теории функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций | 1.Точки дифференцируемости непрерывных функций.<br>2.Покрытия Витали.<br>3.Производное число функции.<br>4.Теорема Лебега о дифференцируемости монотонной функции.<br>5.Функции ограниченной вариации.<br>6.Полная вариация функции и её свойства.<br>7.Связь функций ограниченной вариации с монотонными функциями. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### **Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы теста.

*Оценка: 4*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные ответы на 6 вопросов теста.

*Оценка: 3*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные ответы на 4 или 5 вопросов теста.

### **КМ-2. Интеграл Римана–Стилтьеса и абсолютно непрерывные функции**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 25

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 3 задачи. Для написания работы студенту даётся 45 минут.

#### **Краткое содержание задания:**

Контрольная работа проверяет знание студентом основных результатов теории абсолютно непрерывных функций.

**Контрольные вопросы/задания:**

|                                                                                                                |                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Знать: терминологию и основные результаты теории функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций | 1. Интеграл Римана–Стилтьеса и его свойства.<br>2. Абсолютно непрерывные функции и их свойства.<br>3. Формулы Ньютона–Лейбница и интегрирования по частям для абсолютно непрерывных функций. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «отлично» выставляется, если решены все 3 задачи с возможными несущественными погрешностями.

*Оценка: 4*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «хорошо» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

*Оценка: 3*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена одна из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

**КМ-3. Пространства Соболева и элементы теории обобщённых функций**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 40

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту дётся 60 минут.

**Краткое содержание задания:**

Контрольная работа проверяет умение студентом применять основные понятия и результаты теории пространств Соболева одной действительной переменной, а также знание студентом терминологии и базовых результатов теории обобщённых функций.

**Контрольные вопросы/задания:**

|                                                                                      |                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Знать: терминологию и элементы теории обобщённых функций                             | 1. Пространства основных и обобщённых функций. Регулярные и сингулярные обобщённые функции.<br>2. Операции над обобщёнными функциями. |
| Уметь: применять теорию пространств Соболева функций одной действительной переменной | 1. Обобщённые производные по Соболеву и их свойства. Пространства Соболева.<br>2. Теоремы вложения.                                   |

**Описание шкалы оценивания:**

*Оценка: 5*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

*Оценка: 4*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

*Оценка:* 3

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

#### **КМ-4. Элементы нелинейного функционального анализа**

**Формы реализации:** Письменная работа

**Тип контрольного мероприятия:** Контрольная работа

**Вес контрольного мероприятия в БРС:** 20

**Процедура проведения контрольного мероприятия:** Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 2 задачи. Для написания работы студенту дается 30 минут.

#### **Краткое содержание задания:**

Контрольная работа проверяет умение студентом применять базовые результаты нелинейного функционального анализа.

#### **Контрольные вопросы/задания:**

|                                                                         |                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Уметь: применять базовые результаты нелинейного функционального анализа | 1.Оператор Немыцкого.<br>2.Теоремы Брауэра и Шаудера о неподвижной точке. |
|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|

#### **Описание шкалы оценивания:**

*Оценка:* 5

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «отлично» выставляется, если решены обе задачи с возможными несущественными погрешностями.

*Оценка:* 4

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «хорошо» выставляется, если решена одна из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

*Оценка:* 3

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена одна из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

# СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

## 1 семестр

**Форма промежуточной аттестации:** Экзамен

### Пример билета

1. Обобщённая производная по Соболеву и усреднение.
2. Теорема Брауэра и лемма об остром угле.

### Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса из программы экзамена. На подготовку к ответу студенту даётся 60 минут. Во время ответа студенту могут быть заданы дополнительные вопросы по программе экзамена.

### *1. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины*

**1. Компетенция/Индикатор:** ИД-1<sub>ПК-1</sub> Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании

### Вопросы, задания

1. Обобщённая производная по Соболеву и усреднение.
2. Пространства Соболева  $W_p^m(a,b)$  и их общие свойства.
3. Изоморфизмы  $W_1^1(a,b) \cong AC[a,b]$  и  $W_\infty^1(a,b) \cong Lip[a,b]$ .
4. Вложения  $W_p^m(a,b) \subset C^{\{m-1\}}[a,b]$ .
5. Вложения  $W_p^m(a,b) \subset C^{\{m-1, 1/p'\}}[a,b]$ .
6. Компактность вложений  $W_p^m(a,b) \subset C^{\{m-1\}}[a,b]$ .
7. Компактность вложений  $W_p^m(a,b) \subset W_q^{\{m-1\}}(a,b)$ .
8. Эквивалентные нормы на пространстве  $W_p^1(a,b)$ .
9. Пространство  $W_p^\circ(a,b)$ .
10. Разложение в ряд Фурье функций из  $W_2^1(-a,a)$ ,  $W_2^1(0,a)$  и  $W_2^\circ(0,a)$ .
11. Пространство основных функций  $D(a,b)$ .
12. Пространство Шварца.
13. Обобщённые функции.
14. Регулярные и сингулярные обобщённые функции.
15. Операции над обобщёнными функциями.
16. Простейшие уравнения в обобщённых функциях.
17. Обобщённая производная произведения функций.
18. Критерий постоянства суммируемой функции в терминах обобщённой производной по Соболеву.
19. Обобщённая производная по Соболеву и её элементарные свойства.
20. Теорема Лебега о дифференцируемости монотонной функции.
21. Интегрируемость производной монотонной функции по Лебегу и «неравенство Ньютона–Лейбница».
22. Производное число функции. Оценки внешней меры образа множества при монотонном отображении.
23. Функции ограниченной вариации. Элементарные свойства полной вариации. Нормированная алгебра  $BV[a,b]$ .

24. Полнота нормированной алгебры  $BV[a, b]$ .
25. Свойства полной вариации с переменным верхним пределом. Представление функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций и следствия этого представления.
26. Принцип выбора Хелли.
27. Интеграл Римана–Стилтьеса и его простейшие свойства: билинейность и аддитивность по отрезку интегрирования.
28. «Интегрирование по частям» в интеграле Римана–Стилтьеса. Интегрируемость непрерывной функции по функции ограниченной вариации.
29. Интеграл Римана–Стилтьеса непрерывной функции по функции, обладающей интегрируемой по Риману производной. Вычисление интеграла Римана–Стилтьеса непрерывной функции по кусочно-постоянной функции.
30. Предельный переход под знаком интеграла Римана–Стилтьеса.
31. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на  $C[a, b]$ .
32. Покрывтия в смысле Витали. Теорема Витали и её следствие.
33. Критерий постоянства абсолютно непрерывной функции.
34. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница.
35. Полная вариация абсолютно непрерывной функции.
36. Функции скачков и их свойства.
37. Каноническое разложение функции ограниченной вариации.
38. Критерий абсолютной непрерывности непрерывной монотонной функции.
39. Вычисление интеграла Римана–Стилтьеса непрерывной функции по функции скачков.
40. Вычисление интеграла Римана–Стилтьеса непрерывной функции и функции ограниченной вариации по абсолютно непрерывной функции. Формула «интегрирования по частям» для абсолютно непрерывных функций.
41. Критерий монотонности функции в терминах производных чисел и его обобщение.
42. Критерий абсолютной непрерывности дифференцируемой функции. Критерий абсолютной непрерывности обобщённой первообразной.
43. Абсолютно непрерывные функции и их простейшие свойства: алгебра  $AC[a, b]$ , конечность полной вариации, абсолютная непрерывность композиции.
44. Условие Каратеодори и оператор Немыцкого.
45. Теорема Брауэра и лемма об остром угле.
46. Проекторы Шаудера и их свойства. Теорема Шаудера о неподвижной точке (принцип Шаудера).
47. Следствия принципа Шаудера. Теорема Лере–Шаудера.

### **Материалы для проверки остаточных знаний**

1. Верно ли, что любая непрерывная функция является функцией ограниченной вариации?  
 Ответы:  
 да, нет  
 Верный ответ: нет
2. Верно ли, что любая абсолютно непрерывная функция является функцией ограниченной вариации?  
 Ответы:  
 да, нет  
 Верный ответ: да
3. Функции каких из перечисленных ниже классов дифференцируемы почти всюду?  
 Ответы:  
 а) непрерывные  
 б) липшицевы  
 в) ограниченные

- г) абсолютно непрерывные
- д) ограниченной вариации
- е) монотонные

Верный ответ: б, г, д, е

4. Верно ли, что пространства Соболева  $W_{p^m}(a,b)$  полны при любых показателях  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [1, \infty]$ ?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

5. Верно ли, что пространства Соболева  $W_{p^m}(a,b)$  сепарабельны при любых показателях  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [1, \infty]$ ?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

6. Верно ли, что если функция  $f \in L_1(a,b)$  обладает обобщённой по Соболеву производной на интервале  $(a,b)$ , то у функции  $f$  на  $(a,b)$  существует классическая производная почти всюду?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

7. Обобщённая функция — это

Ответы:

- а) локально суммируемая функция, у которой существует обобщённая по Соболеву производная.
- б) локально суммируемая функция.
- в) линейный непрерывный функционал на пространстве основных (пробных) функций.
- г) линейный функционал на пространстве основных (пробных) функций.

Верный ответ: в)

8. Верно ли, что любая обобщённая функция дифференцируема бесконечное число раз в обобщённом смысле?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

9. Что достаточно потребовать от непустого множества  $A \subset \mathbb{R}^n$ , чтобы любое непрерывное отображение этого множества в себя имело неподвижную точку?

Ответы:

- а) ограниченность
- б) замкнутость
- в) выпуклость
- г) выпуклость и компактность
- д) компактность
- е) замкнутость и выпуклость
- ж) ограниченность и выпуклость

Верный ответ: г

10. Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  — метрическое пространство. Отображение  $f: X \rightarrow X$  называется *сжимающим*, если

Ответы:

- а)  $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$  для любых точек  $x, y \in X$ ; б)  $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$  для любых точек  $x, y \in X$ ; в) существует число  $0 \leq \alpha < 1$  такое, что  $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$  для любых точек  $x, y \in X$ ; г) существует число  $\alpha > 1$  такое, что  $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$  для любых точек  $x, y \in X$ ; д) существует число  $0 \leq \alpha < 1$  такое, что  $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$  для любых точек  $x, y \in X$

Верный ответ: д

## ***II. Описание шкалы оценивания***

*Оценка: 5*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «отлично» ставится, если студент обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание материалов дисциплины, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, даёт полный исчерпывающий ответ как на основные вопросы билета, так и на дополнительные вопросы экзаменатора.

*Оценка: 4*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «хорошо» ставится, если студент обнаруживает полное знание материалов дисциплины, успешно выполняет предусмотренные программой задания; в ответе имеют место несущественные неточности, которые студент способен исправить самостоятельно, благодаря наводящему вопросу.

*Оценка: 3*

*Описание характеристики выполнения знания:* Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает знание материалов дисциплины в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляется с выполнением заданий, предусмотренных программой; в ответе на основные вопросы билета и/или дополнительные вопросы экзаменатора имеются существенные неточности, но студент обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством экзаменатора.

## ***III. Правила выставления итоговой оценки по курсу***

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих.