

**Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

Направление подготовки/специальность: 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Наименование образовательной программы: Математическое и компьютерное моделирование

Уровень образования: высшее образование - магистратура

Форма обучения: Очная

**Оценочные материалы
по дисциплине
Методы решения краевых задач**

**Москва
2024**

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Разработчик

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Боровиков И.А.
	Идентификатор	R2e186edb-BorovikovIA-68185ef6

И.А.
Боровиков

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель
образовательной
программы

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Черепова М.Ф.
	Идентификатор	R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1

М.Ф.
Черепова

Заведующий
выпускающей кафедрой

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Зубков П.В.
	Идентификатор	R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c

П.В. Зубков

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки: достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. РПК-1 Способен разрабатывать и исследовать математические модели естествознания и технологий, а также осуществлять их компьютерную реализацию

ИД-1 Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании

и включает:

для текущего контроля успеваемости:

Форма реализации: Письменная работа

1. Интеграл Бохнера (Контрольная работа)
2. Методы исследования нелинейных стационарных задач (Тестирование)
3. Методы исследования нестационарных задач (Контрольная работа)
4. Функциональные пространства (Тестирование)

БРС дисциплины

3 семестр

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %				
	Индекс КМ:	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4
	Срок КМ:	4	8	12	15
Нелинейные стационарные задачи					
Нелинейные стационарные задачи		+			
Функциональные пространства, используемые при исследовании нестационарных задач					
Функциональные пространства, используемые при исследовании нестационарных задач			+	+	
Нестационарные задачи					
Нестационарные задачи					+
Вес КМ:		20	30	20	30

\$Общая часть/Для промежуточной аттестации\$

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Индекс компетенции	Индикатор	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Контрольная точка
РПК-1	ИД-1 _{РПК-1} Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании	Знать: терминологию и основные результаты теории функциональных пространств, применяемых при исследовании эволюционных задач основные методы функционального анализа, применяемые при исследовании нелинейных стационарных краевых задач Уметь: применять теорию интеграла Бохнера при исследовании нестационарных задач применять методы функционального анализа для исследования нестационарных задач	Методы исследования нелинейных стационарных задач (Тестирование) Интеграл Бохнера (Контрольная работа) Функциональные пространства (Тестирование) Методы исследования нестационарных задач (Контрольная работа)

II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания

КМ-1. Методы исследования нелинейных стационарных задач

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Тестирование

Вес контрольного мероприятия в БРС: 20

Процедура проведения контрольного мероприятия: Тестирование проводится во время планового практического занятия и состоит из 7 вопросов. Для написания работы студенту даётся 25 минут.

Краткое содержание задания:

Тестирование проверяет знание студентом основных методов исследования нелинейных стационарных задач.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: основные методы функционального анализа, применяемые при исследовании нелинейных стационарных краевых задач	1.Сжимающие отображения. Принцип неподвижной точки Банаха и его обобщение. 2.Теорема Брауэра. 3.Принцип неподвижной точки Шаудера. 4.Оператор Немыцкого и его свойства. 5.Вариационный метод. Потенциальные операторы. 6.Метод монотонности. 7.Метод компактности.
--	--

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы теста.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные ответы на 6 вопросов теста.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные ответы на 4 или 5 вопросов теста.

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если дано менее 4 правильных ответов на вопросы теста.

КМ-2. Интеграл Бохнера

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 30

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 3 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет умение студентом применять основные понятия и факты теории интеграла Бохнера.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: применять теорию интеграла Бохнера при исследовании нестационарных задач	1. Сильная и слабая измеримости. 2. Интеграл Бохнера и его свойства. 3. Интеграл Бохнера с переменным пределом интегрирования. Формула Ньютона–Лейбница.
---	--

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 3 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена 1 из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполнены условия для выставления более высокой оценки.

КМ-3. Функциональные пространства

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Тестирование

Вес контрольного мероприятия в БРС: 20

Процедура проведения контрольного мероприятия: Тестирование проводится во время планового практического занятия и состоит из 5 вопросов. Для написания работы студенту даётся 15 минут.

Краткое содержание задания:

Тестирование проверяет знание студентом основных результатов теории функциональных пространств, применяемых при исследовании эволюционных задач.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: терминологию и основные результаты теории функциональных пространств, применяемых при исследовании эволюционных задач	1. Пространства $L_p(a, b; V)$ и их свойства. 2. Приближение функций из $L_p(a, b; V)$ гладкими и ступенчатыми функциями. 3. Обобщённые функции со значениями в банаховом пространстве и операции над ними. 4. Пространства $W^{1,p}_0(a, b; V_0, V_1)$ и их свойства. 5. Вложения пространств $W^{1,p}_0(a, b; V_0, V_1)$.
--	--

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы теста.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные ответы на 4 вопроса теста.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные ответы на 3 вопроса теста.

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если дано менее 3 правильных ответов на вопросы теста.

КМ-4. Методы исследования нестационарных задач

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 30

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 2 задачи. Для написания работы студенту дается 60 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет умение студентом применять методы исследования нестационарных задач.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: применять методы функционального анализа для исследования нестационарных задач	1. Исследование разрешимости начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения. 2. Исследование разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения.
---	--

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены обе задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решена одна из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена одна из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если полностью не решена ни одна из предложенных задач.

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

3 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

1. Интеграл Бохнера и пространство $L_{\text{undefined}}, b; X_{\text{undefined}}$. Теорема Бохнера.
2. Начально-краевые задачи как операторные дифференциальные уравнения.

Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса из программы экзамена. На подготовку к ответу студенту даётся 60 минут. Во время ответа студенту могут быть заданы дополнительные вопросы по программе экзамена.

I. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины

1. Компетенция/Индикатор: ИД-1_{РПК-1} Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании

Вопросы, задания

1. Оператор Немыцкого и его свойства.
2. Применение принципов неподвижной точки для исследования разрешимости нелинейных стационарных краевых задач.
3. Вариационный метод.
4. Методы монотонности и компактности.
5. Пространство $C([a, b]; X)$: полнота, сепарабельность.
6. Деминепрерывные функции. Пространство $C_w^w([a, b]; X)$ и его полнота.
7. Пространство $C([a, b]; X)$ ($m \in N$): полнота, сепарабельность.
8. Слабо дифференцируемые функции.
- Пространство $C_w^w_{\text{undefined}}[a, b]; X_{\text{undefined}}$ ($m \in N$) и его полнота.
9. Сильно и слабо измеримые функции и пространства $M_{\text{undefined}}, b; X_{\text{undefined}}$, $M_w^w_{\text{undefined}}, b; X_{\text{undefined}}$.
10. Теорема Петтиса.
11. Сильная измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности сильно измеримых функций. Сильная измеримость деминепрерывных функций.
12. Интеграл Бохнера и пространство $L_{\text{undefined}}, b; X_{\text{undefined}}$. Теорема Бохнера.
13. Абсолютная непрерывность и счётная аддитивность интеграла Бохнера. Однородность интеграла Бохнера относительно линейных непрерывных операторов.
14. Пространство $L_{\text{undefined}}, b; X_{\text{undefined}}$. Плотность множества $C^\circ \circ_{\text{undefined}}(a, b), X_{\text{undefined}}$ и множества ступенчатых функций в пространстве $L_{\text{undefined}}, b; X_{\text{undefined}}$.
15. Пространства $L_p^p_{\text{undefined}}, b; X_{\text{undefined}}$, $1 \leq p \leq \infty$. Плотность множества $C^\circ \circ_{\text{undefined}}(a, b), X_{\text{undefined}}$ и множества ступенчатых функций в пространстве $L_p^p_{\text{undefined}}, b; X_{\text{undefined}}$ при $1 \leq p < \infty$.
16. Непрерывность относительно сдвига функций из $L_p^p_{\text{undefined}}, b; X_{\text{undefined}}$ при $1 \leq p < \infty$.

17. Полнота пространства L_p^p *undefined*, $b; X$ *undefined* при $1 \leq p \leq \infty$ и сепарабельность при $1 \leq p < \infty$.
18. Неравенство Гёльдера. Гильбертово пространство L_2^2 *undefined*, $b; H$ *undefined*.
19. Теорема Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов над L_p^p *undefined*, $b; X$ *undefined* при $1 \leq p < \infty$.
20. Интеграл Бохнера с переменным пределом. Формула Ньютона–Лейбница.
21. Обобщённые функции со значениями в банаховом пространстве. Регулярные и сингулярные обобщённые функции.
22. Операция дифференцирования обобщённых функций со значениями в банаховом пространстве и её свойства.
23. Пространство $W_{p_0^0, p_1^1}^{p_0^0, p_1^1}$ *undefined*, $b; X_0^0, X_1^1$ *undefined* ($1 \leq p_0^0, p_1^1 \leq \infty$): полнота, сепарабельность.
24. Вложение $W_{p_0^0, p_1^1}^{p_0^0, p_1^1}$ *undefined*, $b; X_0^0, X_1^1$ *undefined* $\hookrightarrow C$ *undefined*[a, b]; X_1^1 *undefined*.
25. Лемма о сходимости в C *undefined*[a, b]; X *undefined*. Лемма об одном интерполяционном неравенстве.
26. Теорема Дубинского.
Вложение $W_{p_0^0, p_1^1}^{p_0^0, p_1^1}$ *undefined*, $b; X_0^0, X_1^1$ *undefined* $\hookrightarrow C$ *undefined*[a, b]; X_1^1 *undefined* при $1 \leq p_0^0 \leq \infty, 1 < p_1^1 \leq \infty$. Теорема Обэна–Лионса.
27. Плотность C *undefined*[a, b]; X_0^0 *undefined* в $W_{p_0^0, p_1^1}^{p_0^0, p_1^1}$ *undefined*, $b; X_0^0, X_1^1$ *undefined* при $1 \leq p_0^0, p_1^1 < \infty$.
28. Вложение $W_{p_0^0, p_1^1}^{p_0^0, p_1^1}$ *undefined*, $b; X, X$ *undefined* $\hookrightarrow C$ *undefined*[a, b]; H *undefined* и формула интегрирования «по частям».
29. Начально-краевые задачи как операторные дифференциальные уравнения.
30. Неравенство Гронуолла. Теорема Каратеодори о локальной разрешимости задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
31. Теорема о глобальной разрешимости задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
32. Метод Фаэдо–Галёркина.
33. Исследование разрешимости начально-краевых задач для линейного параболического уравнения.
34. Использование метода компактности для доказательства разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного параболического уравнения.
35. Использование метода монотонности для доказательства разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения.
36. Существование и единственность решения начальной задачи для эволюционного операторного уравнения $u + A(u) = f$ с монотонным оператором A .
37. Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения.

Материалы для проверки остаточных знаний

1. Что достаточно потребовать от непустого подмножества банахова пространства, чтобы любое непрерывное отображение этого множества в себя имело неподвижную точку?

Ответы:

- а) ограниченность
- б) замкнутость

- в) выпуклость
- г) выпуклость и компактность
- д) компактность
- е) замкнутость и выпуклость
- ж) ограниченность и выпуклость

Верный ответ: г

2. Вариационный метод исследования разрешимости стационарных задач применим к задачам

Ответы:

- а) со сжимающим оператором
- б) с непрерывным оператором
- в) с непрерывно дифференцируемым оператором
- г) с потенциальным оператором
- д) с монотонным оператором

Верный ответ: г

3. Пусть X — нормированное пространство. Верно ли, что пространство $C([a, b]; X)$ является банаховым в том и только в том случае, когда пространство X банахово?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

4. Пусть X — нормированное пространство. Верно ли, что пространство $C([a, b]; X)$ является сепарабельным в том и только в том случае, когда пространство X сепарабельно?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

5. Во что перейдёт теория интеграла Бохнера для функций $f: (a, b) \rightarrow X$, если $X = R$?

Ответы:

- а) В теорию интеграла Римана.
- б) В теорию интеграла Римана–Стилтьеса.
- в) В теорию интеграла Лебега.
- г) В теорию интеграла Лебега–Стилтьеса.

Верный ответ: в

6. Пусть X — нормированное пространство. Верно ли, что пространство $L_p^p(a, b; X)$ является банаховым при всех $1 \leq p \leq \infty$ в том и только в том случае, когда пространство X банахово?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

7. Пусть X — нормированное пространство. Пространство $L_p^p(a, b; X)$ является сепарабельным в том и только в том случае, когда

Ответы:

- а) $1 < p < \infty$;
- б) $1 \leq p < \infty$;
- в) $1 \leq p \leq \infty$;
- г) $1 < p < \infty$ и X сепарабельно;
- д) $1 \leq p < \infty$ и X сепарабельно;
- е) $1 \leq p \leq \infty$ и X сепарабельно.

Верный ответ: д

8. Метод Фаздо–Галёркина — это метод построения приближенных решений

Ответы:

- а) для стационарных задач
- б) для нестационарных задач

Верный ответ: б

9. Пусть X — банахово пространство. Для существования и единственности функции $u \in C([0, T]; X)$, являющейся решением задачи Коши $u(t) = f(t, u(t))$, $u(0) = a$, достаточно потребовать, чтобы $f(\cdot, x) \in C([0, T]; X)$ при любом $x \in X$ и

Ответы:

- а) $f(t, \cdot) \in C(X; X)$ при любом $t \in [0, T]$;
- б) $f(t, \cdot) \in Lip(X; X)$ при любом $t \in [0, T]$;
- в) чтобы существовала константа $L > 0$ такая, что $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$ для всех $t \in [0, T]$ и $x, y \in X$.

Верный ответ: в

II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» ставится, если студент обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание материалов дисциплины, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, даёт полный исчерпывающий ответ как на основные вопросы билета, так и на дополнительные вопросы экзаменатора.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» ставится, если студент обнаруживает полное знание материалов дисциплины, успешно выполняет предусмотренные программой задания; в ответе имеют место несущественные неточности, которые студент способен исправить самостоятельно, благодаря наводящему вопросу.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает знание материалов дисциплины в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляется с выполнением заданий, предусмотренных программой; в ответе на основные вопросы билета и/или дополнительные вопросы экзаменатора имеются существенные неточности, но студент обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством экзаменатора.

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает серьёзные пробелы в знаниях основных материалов дисциплины, допускает принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий.

III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих.