

**Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

Направление подготовки/специальность: 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Наименование образовательной программы: Математическое и компьютерное моделирование

Уровень образования: высшее образование - магистратура

Форма обучения: Очная

**Оценочные материалы
по дисциплине
Методы решения краевых задач**

**Москва
2024**

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Разработчик

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Боровиков И.А.
	Идентификатор	R2e186edb-BorovikovIA-68185ef6

И.А.
Боровиков

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель
образовательной
программы

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Черепова М.Ф.
	Идентификатор	R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1

М.Ф.
Черепова

Заведующий
выпускающей кафедрой

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Зубков П.В.
	Идентификатор	R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c

П.В. Зубков

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. РПК-1 Способен разрабатывать и исследовать математические модели естествознания и технологий, а также осуществлять их компьютерную реализацию

ИД-1 Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании

и включает:

для текущего контроля успеваемости:

Форма реализации: Письменная работа

1. Интеграл Бохнера (Контрольная работа)
2. Методы исследования нелинейных стационарных задач (Тестирование)
3. Методы исследования нестационарных задач (Контрольная работа)
4. Функциональные пространства (Тестирование)

БРС дисциплины

3 семестр

Перечень контрольных мероприятий текущего контроля успеваемости по дисциплине:

КМ-1 Методы исследования нелинейных стационарных задач (Тестирование)

КМ-2 Интеграл Бохнера (Контрольная работа)

КМ-3 Функциональные пространства (Тестирование)

КМ-4 Методы исследования нестационарных задач (Контрольная работа)

Вид промежуточной аттестации – Экзамен.

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %				
	Индекс КМ:	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4
	Срок КМ:	4	8	12	15
Нелинейные стационарные задачи					
Нелинейные стационарные задачи		+			
Функциональные пространства, используемые при исследовании нестационарных задач					
Функциональные пространства, используемые при исследовании нестационарных задач			+	+	

Нестационарные задачи				
Нестационарные задачи				+
Всего КМ:	20	30	20	30

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Индекс компетенции	Индикатор	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Контрольная точка
РПК-1	ИД-1 _{РПК-1} Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании	Знать: терминологию и основные результаты теории функциональных пространств, применяемых при исследовании эволюционных задач основные методы функционального анализа, применяемые при исследовании нелинейных стационарных краевых задач Уметь: применять теорию интеграла Бохнера при исследовании нестационарных задач применять методы функционального анализа для исследования нестационарных задач	КМ-1 Методы исследования нелинейных стационарных задач (Тестирование) КМ-2 Интеграл Бохнера (Контрольная работа) КМ-3 Функциональные пространства (Тестирование) КМ-4 Методы исследования нестационарных задач (Контрольная работа)

II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания

КМ-1. Методы исследования нелинейных стационарных задач

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Тестирование

Вес контрольного мероприятия в БРС: 20

Процедура проведения контрольного мероприятия: Тестирование проводится во время планового практического занятия и состоит из 7 вопросов. Для написания работы студенту даётся 25 минут.

Краткое содержание задания:

Тестирование проверяет знание студентом основных методов исследования нелинейных стационарных задач.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Знать: основные методы функционального анализа, применяемые при исследовании нелинейных стационарных краевых задач	1.Сжимающие отображения. Принцип неподвижной точки Банаха и его обобщение. 2.Теорема Брауэра. 3.Принцип неподвижной точки Шаудера. 4.Оператор Немыцкого и его свойства. 5.Вариационный метод. Потенциальные операторы. 6.Метод монотонности. 7.Метод компактности.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы теста.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные ответы на 6 вопросов теста.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные ответы на 4 или 5 вопросов теста.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если дано менее 4 правильных ответов на вопросы теста.

КМ-2. Интеграл Бохнера

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 30

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 3 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет умение студентом применять основные понятия и факты теории интеграла Бохнера.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Уметь: применять теорию интеграла Бохнера при исследовании нестационарных задач	1. Сильная и слабая измеримости. 2. Интеграл Бохнера и его свойства. 3. Интеграл Бохнера с переменным пределом интегрирования. Формула Ньютона–Лейбница.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 3 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена 1 из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполнены условия для выставления более высокой оценки.

КМ-3. Функциональные пространства

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Тестирование

Вес контрольного мероприятия в БРС: 20

Процедура проведения контрольного мероприятия: Тестирование проводится во время планового практического занятия и состоит из 5 вопросов. Для написания работы студенту даётся 15 минут.

Краткое содержание задания:

Тестирование проверяет знание студентом основных результатов теории функциональных пространств, применяемых при исследовании эволюционных задач.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Знать: терминологию и основные результаты	1. Пространства $L_p(a,b;V)$ и их

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
теории функциональных пространств, применяемых при исследовании эволюционных задач	свойства. 2. Приближение функций из $L_p(a,b;V)$ гладкими и ступенчатыми функциями. 3. Обобщённые функции со значениями в банаховом пространстве и операции над ними. 4. Пространства $W^{1,p}_0(a,b;V_0,V_1)$ и их свойства. 5. Вложения пространств $W^{1,p}_0(a,b;V_0,V_1)$.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы теста.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные ответы на 4 вопроса теста.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные ответы на 3 вопроса теста.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если дано менее 3 правильных ответов на вопросы теста.

КМ-4. Методы исследования нестационарных задач

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 30

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 2 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет умение студентом применять методы исследования нестационарных задач.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Уметь: применять методы функционального анализа для исследования нестационарных задач	1. Исследование разрешимости начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения. 2. Исследование разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены обе задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решена одна из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена одна из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если полностью не решена ни одна из предложенных задач.

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

3 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

1. Интеграл Бохнера и пространство $L_{\text{undefined}}(a, b; X_{\text{undefined}})$. Теорема Бохнера.
2. Начально-краевые задачи как операторные дифференциальные уравнения.

Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса из программы экзамена. На подготовку к ответу студенту даётся 60 минут. Во время ответа студенту могут быть заданы дополнительные вопросы по программе экзамена.

I. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины

1. Компетенция/Индикатор: ИД-1_{РПК-1} Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании

Вопросы, задания

1. Оператор Немыцкого и его свойства.
2. Применение принципов неподвижной точки для исследования разрешимости нелинейных стационарных краевых задач.
3. Вариационный метод.
4. Методы монотонности и компактности.
5. Пространство $C([a, b]; X)$: полнота, сепарабельность.
6. Деминепрерывные функции. Пространство $C_w^w([a, b]; X)$ и его полнота.
7. Пространство $C([a, b]; X)$ ($m \in N$): полнота, сепарабельность.
8. Слабо дифференцируемые функции.
- Пространство $C_w^w \text{ undefined}[a, b]; X_{\text{undefined}}$ ($m \in N$) и его полнота.
9. Сильно и слабо измеримые функции и пространства $M_{\text{undefined}}(a, b; X_{\text{undefined}})$, $M_w^w \text{ undefined}(a, b; X_{\text{undefined}})$.
10. Теорема Петтиса.
11. Сильная измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности сильно измеримых функций. Сильная измеримость деминепрерывных функций.
12. Интеграл Бохнера и пространство $L_{\text{undefined}}(a, b; X_{\text{undefined}})$. Теорема Бохнера.
13. Абсолютная непрерывность и счётная аддитивность интеграла Бохнера. Однородность интеграла Бохнера относительно линейных непрерывных операторов.
14. Пространство $L_{\text{undefined}}(a, b; X_{\text{undefined}})$. Плотность множества $C^\circ \circ \text{ undefined}(a, b), X_{\text{undefined}}$ и множества ступенчатых функций в пространстве $L_{\text{undefined}}(a, b; X_{\text{undefined}})$.
15. Пространства $L_p^p \text{ undefined}(a, b; X_{\text{undefined}})$, $1 \leq p \leq \infty$. Плотность множества $C^\circ \circ \text{ undefined}(a, b), X_{\text{undefined}}$ и множества ступенчатых функций в пространстве $L_p^p \text{ undefined}(a, b; X_{\text{undefined}})$ при $1 \leq p < \infty$.
16. Непрерывность относительно сдвига функций из $L_p^p \text{ undefined}(a, b; X_{\text{undefined}})$ при $1 \leq p < \infty$.

17. Полнота пространства L_p^p *undefined*, $b; X$ *undefined* при $1 \leq p \leq \infty$ и сепарабельность при $1 \leq p < \infty$.
18. Неравенство Гёльдера. Гильбертово пространство L_2^2 *undefined*, $b; H$ *undefined*.
19. Теорема Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов над L_p^p *undefined*, $b; X$ *undefined* при $1 \leq p < \infty$.
20. Интеграл Бохнера с переменным пределом. Формула Ньютона–Лейбница.
21. Обобщённые функции со значениями в банаховом пространстве. Регулярные и сингулярные обобщённые функции.
22. Операция дифференцирования обобщённых функций со значениями в банаховом пространстве и её свойства.
23. Пространство $W_{p_0^0, p_1^1}^{p_0^0, p_1^1}$ *undefined*, $b; X_0^0, X_1^1$ *undefined* ($1 \leq p_0^0, p_1^1 \leq \infty$): полнота, сепарабельность.
24. Вложение $W_{p_0^0, p_1^1}^{p_0^0, p_1^1}$ *undefined*, $b; X_0^0, X_1^1$ *undefined* $\hookrightarrow C$ *undefined*[a, b]; X_1^1 *undefined*.
25. Лемма о сходимости в C *undefined*[a, b]; X *undefined*. Лемма об одном интерполяционном неравенстве.
26. Теорема Дубинского.
Вложение $W_{p_0^0, p_1^1}^{p_0^0, p_1^1}$ *undefined*, $b; X_0^0, X_1^1$ *undefined* $\hookrightarrow C$ *undefined*[a, b]; X_1^1 *undefined* при $1 \leq p_0^0 \leq \infty, 1 < p_1^1 \leq \infty$. Теорема Обэна–Лионса.
27. Плотность C *undefined*[a, b]; X_0^0 *undefined* в $W_{p_0^0, p_1^1}^{p_0^0, p_1^1}$ *undefined*, $b; X_0^0, X_1^1$ *undefined* при $1 \leq p_0^0, p_1^1 < \infty$.
28. Вложение $W_{p_0^0, p_1^1}^{p_0^0, p_1^1}$ *undefined*, $b; X, X$ *undefined* $\hookrightarrow C$ *undefined*[a, b]; H *undefined* и формула интегрирования «по частям».
29. Начально-краевые задачи как операторные дифференциальные уравнения.
30. Неравенство Гронуолла. Теорема Каратеодори о локальной разрешимости задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
31. Теорема о глобальной разрешимости задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
32. Метод Фаэдо–Галёркина.
33. Исследование разрешимости начально-краевых задач для линейного параболического уравнения.
34. Использование метода компактности для доказательства разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного параболического уравнения.
35. Использование метода монотонности для доказательства разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения.
36. Существование и единственность решения начальной задачи для эволюционного операторного уравнения $u + A(u) = f$ с монотонным оператором A .
37. Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения.

Материалы для проверки остаточных знаний

1. Что достаточно потребовать от непустого подмножества банахова пространства, чтобы любое непрерывное отображение этого множества в себя имело неподвижную точку?

Ответы:

- а) ограниченность
- б) замкнутость

- в) выпуклость
- г) выпуклость и компактность
- д) компактность
- е) замкнутость и выпуклость
- ж) ограниченность и выпуклость

Верный ответ: г

2. Вариационный метод исследования разрешимости стационарных задач применим к задачам

Ответы:

- а) со сжимающим оператором
- б) с непрерывным оператором
- в) с непрерывно дифференцируемым оператором
- г) с потенциальным оператором
- д) с монотонным оператором

Верный ответ: г

3. Пусть X — нормированное пространство. Верно ли, что пространство $C([a, b]; X)$ является банаховым в том и только в том случае, когда пространство X банахово?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

4. Пусть X — нормированное пространство. Верно ли, что пространство $C([a, b]; X)$ является сепарабельным в том и только в том случае, когда пространство X сепарабельно?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

5. Во что перейдёт теория интеграла Бохнера для функций $f: (a, b) \rightarrow X$, если $X = R$?

Ответы:

- а) В теорию интеграла Римана.
- б) В теорию интеграла Римана–Стилтьеса.
- в) В теорию интеграла Лебега.
- г) В теорию интеграла Лебега–Стилтьеса.

Верный ответ: в

6. Пусть X — нормированное пространство. Верно ли, что пространство $L_p^p(a, b; X)$ является банаховым при всех $1 \leq p \leq \infty$ в том и только в том случае, когда пространство X банахово?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

7. Пусть X — нормированное пространство. Пространство $L_p^p(a, b; X)$ является сепарабельным в том и только в том случае, когда

Ответы:

- а) $1 < p < \infty$;
- б) $1 \leq p < \infty$;
- в) $1 \leq p \leq \infty$;
- г) $1 < p < \infty$ и X сепарабельно;
- д) $1 \leq p < \infty$ и X сепарабельно;
- е) $1 \leq p \leq \infty$ и X сепарабельно.

Верный ответ: д

8. Метод Фаздо–Галёркина — это метод построения приближенных решений

Ответы:

- а) для стационарных задач
- б) для нестационарных задач

Верный ответ: б

9. Пусть X — банахово пространство. Для существования и единственности функции $u \in C([0, T]; X)$, являющейся решением задачи Коши $u(t) = f(t, u(t))$, $u(0) = a$, достаточно потребовать, чтобы $f(\cdot, x) \in C([0, T]; X)$ при любом $x \in X$ и

Ответы:

- а) $f(t, \cdot) \in C(X; X)$ при любом $t \in [0, T]$;
- б) $f(t, \cdot) \in Lip(X; X)$ при любом $t \in [0, T]$;
- в) чтобы существовала константа $L > 0$ такая, что $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$ для всех $t \in [0, T]$ и $x, y \in X$.

Верный ответ: в

II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» ставится, если студент обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание материалов дисциплины, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, даёт полный исчерпывающий ответ как на основные вопросы билета, так и на дополнительные вопросы экзаменатора.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» ставится, если студент обнаруживает полное знание материалов дисциплины, успешно выполняет предусмотренные программой задания; в ответе имеют место несущественные неточности, которые студент способен исправить самостоятельно, благодаря наводящему вопросу.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает знание материалов дисциплины в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляется с выполнением заданий, предусмотренных программой; в ответе на основные вопросы билета и/или дополнительные вопросы экзаменатора имеются существенные неточности, но студент обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством экзаменатора.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает серьёзные пробелы в знаниях основных материалов дисциплины, допускает принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий.

III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих.