

**Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

Направление подготовки/специальность: 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Наименование образовательной программы: Математическое и компьютерное моделирование

Уровень образования: высшее образование - магистратура

Форма обучения: Очная

**Оценочные материалы
по дисциплине
Методы функционального анализа в математической физике**

**Москва
2024**

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Разработчик

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Боровиков И.А.
	Идентификатор	R2e186edb-BorovikovIA-68185ef6

И.А.
Боровиков

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель
образовательной
программы

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Черепова М.Ф.
	Идентификатор	R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1

М.Ф.
Черепова

Заведующий
выпускающей кафедрой

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Зубков П.В.
	Идентификатор	R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c

П.В. Зубков

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. РПК-1 Способен разрабатывать и исследовать математические модели естествознания и технологий, а также осуществлять их компьютерную реализацию

ИД-1 Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании

и включает:

для текущего контроля успеваемости:

Форма реализации: Письменная работа

1. Вариационный метод (Контрольная работа)
2. Обобщённые производные (Контрольная работа)
3. Обобщённые решения краевых задач (Контрольная работа)
4. Пространства Соболева (Контрольная работа)

БРС дисциплины

2 семестр

Перечень контрольных мероприятий текущего контроля успеваемости по дисциплине:

- КМ-1 Обобщённые производные (Контрольная работа)
КМ-2 Пространства Соболева (Контрольная работа)
КМ-3 Обобщённые решения краевых задач (Контрольная работа)
КМ-4 Вариационный метод (Контрольная работа)

Вид промежуточной аттестации – Экзамен.

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %				
	Индекс КМ:	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4
	Срок КМ:	4	8	12	15
Пространства Соболева					
Пространства Соболева		+	+		
Методы решения стационарных задач					
Методы решения стационарных задач			+	+	+
Вес КМ:		20	30	25	25

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Индекс компетенции	Индикатор	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Контрольная точка
РПК-1	ИД-1 _{РПК-1} Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании	Знать: терминологию и основные результаты теории пространств Соболева терминологию и основные методы функционального анализа, применяемые при исследовании стационарных краевых задач математической физики Уметь: применять теорию пространств Соболева при исследовании стационарных краевых задач математической физики применять методы функционального анализа для исследования стационарных краевых задач математической физики	КМ-1 Обобщённые производные (Контрольная работа) КМ-2 Пространства Соболева (Контрольная работа) КМ-3 Обобщённые решения краевых задач (Контрольная работа) КМ-4 Вариационный метод (Контрольная работа)

II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания

КМ-1. Обобщённые производные

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 20

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 3 задачи. Для написания работы студенту даётся 45 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет знание студентом основных понятий и фактов теории обобщённых производных по Соболеву.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Знать: терминологию и основные результаты теории пространств Соболева	1.Обобщённые производные по Соболеву и их простейшие свойства. 2.Обобщённые производные по Соболеву и усреднение. 3.Производная произведения.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 3 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена 1 из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполнены условия для выставления более высокой оценки.

КМ-2. Пространства Соболева

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 30

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 2 теоретических вопроса и 2 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет знание студентом основных понятий и результатов теории пространств Соболева функций многих переменных, а также умение их применять.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Знать: терминологию и основные результаты теории пространств Соболева	1. Пространства Соболева и их простейшие свойства (полнота, сепарабельность, рефлексивность). 2. Замыкание финитных гладких функций в пространстве Соболева. Неравенство Фридрихса.
Уметь: применять теорию пространств Соболева при исследовании стационарных краевых задач математической физики	1. Продолжение функций из пространств Соболева. 2. Теоремы вложения пространств Соболева и их применение.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на оба теоретических вопроса и решены обе задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные ответы на оба теоретических вопроса и решена одна из задач либо решены обе задачи и дан правильный ответ на один из теоретических вопросов.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена одна из предложенных задач и дан правильный ответ на один из теоретических вопросов либо решены обе задачи.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполнены условия для выставления более высокой оценки.

КМ-3. Обобщённые решения краевых задач

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 25

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 3 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет знание студентом основных понятий и фактов теории обобщённых решений краевых задач, а также умение их применять.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
---	------------------------------

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Знать: терминологию и основные методы функционального анализа, применяемые при исследовании стационарных краевых задач математической физики	1.Обобщённые решения краевых задач для уравнения Пуассона. 2.Спектр оператора Лапласа.
Уметь: применять методы функционального анализа для исследования стационарных краевых задач математической физики	1.Метод Галёркина.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 3 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена 1 из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполнены условия для выставления более высокой оценки.

КМ-4. Вариационный метод

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 25

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 2 задачи. Для написания работы студенту дётся 40 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет знание студентом вариационного метода исследования стационарных задач и умение его применять.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Знать: терминологию и основные методы функционального анализа, применяемые при исследовании стационарных краевых задач математической физики	1.Вариационный метод. Потенциальные операторы.
Уметь: применять методы функционального анализа для исследования стационарных краевых задач математической физики	1.Минимизация выпуклых функционалов. Минимизация полунепрерывных снизу функционалов.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены обе задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решена одна из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена одна из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если полностью не решена ни одна из предложенных задач.

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

2 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

1. Рефлексивность пространств Соболева.
2. Метод Галёркина.

Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса из программы экзамена. На подготовку к ответу студенту даётся 60 минут. Во время ответа студенту могут быть заданы дополнительные вопросы по программе экзамена.

1. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины

1. Компетенция/Индикатор: ИД-1_{РПК-1} Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании

Вопросы, задания

1. Разбиение единицы.
2. Обобщённые производные по Соболеву: определение и простейшие свойства.
3. Обобщённые производные по Соболеву и усреднение.
4. Критерий постоянства локально суммируемой функции на открытом связном множестве.
5. Производная произведения.
6. Пространства Соболева: определение, свойства полноты и сепарабельности.
7. Рефлексивность пространств Соболева.
8. Пространство $W^{730}_p(G)$. Продолжение функций из пространства $W^{730}_p(G)$. Формула интегрирования «по частям».
9. Неравенство Фридрихса. Эквивалентная норма на пространстве $W^{730}_p(G)$.
10. Теорема о свойствах сечений функции, обладающей обобщённой производной по Соболеву, и обратная к ней теорема.
11. Пространства $W^{730}_p(G)$. Равенство $W^{730}_p(R) = W^p_p(R)$.
12. Теорема Мейерса–Серрина ($H = W$).
13. Замена переменных для функций из пространств Соболева. Понятие об открытом множестве в R с границей класса $C, k = 0, 1, \dots, \infty$.
14. Плотность сужений на G функций из $C^0_0(R)$ в пространстве $W^p_p(G)$.
15. Продолжение функций из пространства $W^p_p(G)$ (метод Уитни–Хестенса–Сили).
16. Интегральные операторы вида $Af(x) = \int_G \frac{G}{G} K(x, y)f(y)dy$: условия, при которых такие операторы непрерывны и вполне непрерывны.
17. Интегральные операторы $A^k_k f(x) = \int_G \frac{G}{G} \frac{x^k_k - y^k_k}{|x - y|} f(y)dy, 1 \leq k \leq d$: их непрерывность и полная непрерывность.

18. Вложения пространства $W^{730}_p(G)$. След функции из $W^{730}_p(G)$ на многообразии $S \subset$.
19. Вложения пространства $W^p_p(G)$. След функции из $W^p_p(G)$ на многообразии $S \subset$.
20. Вложения пространства $W^p_p(R)$. След функции из $W^p_p(R)$ на многообразии $S \subset R$.
21. Вложения пространств $W^p_p(G)$ (теорема Соболева–Кондрашова).
22. Эквивалентные нормировки пространства $W^p_p(G)$.
23. Неравенство Пуанкаре.
24. Пространства $W^2_2(G)$ и $W^2_2(\partial G)$.
25. Обобщённые решения. Примеры краевых задач, приводящих к операторным уравнениям вида $Au = f$.
26. Обобщённые решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
27. Обобщённые решения задачи Неймана для уравнения Пуассона.
28. Обобщённые решения задачи Робена для уравнения Пуассона.
29. Метод Галёркина.
30. Лемма Лакса–Мильграма.
31. Задача на собственные значения $-\Delta u = \lambda u$.
32. Регулярность обобщённого решения уравнения Пуассона. Регулярность обобщённого решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
33. Сильная и слабая дифференцируемость отображений нормированных пространств.
34. Дифференцируемость композиции отображений нормированных пространств.
35. Формула конечных приращений для отображений нормированных пространств.
36. Вторая производная и второй дифференциал. Формула Тейлора.
37. Метод Ньютона–Канторовича.
38. Минимизация выпуклых функционалов.
39. Слабо полунепрерывные снизу функционалы и их минимизация.
40. Вариационный метод. Потенциал, примеры потенциальных задач.
41. Потенциальные операторы. Критерии потенциальности.
42. Метод Ритца.
43. Монотонные операторы. Критерии монотонности.
44. Коэрцитивные операторы. Связь равномерной монотонности с коэрцитивностью.
45. Связь монотонности оператора с локальной ограниченностью.
46. Теорема о свойстве M для монотонного оператора.
47. Монотонные потенциальные операторы.
48. Основная теорема теории монотонных операторов.
49. Метод компактности.

Материалы для проверки остаточных знаний

1. Верно ли, что если функция $f: (a, b) \rightarrow R$ обладает обобщённой производной по Соболеву, то она дифференцируема в классическом смысле всюду на (a, b) ?
 Ответы:
 да, нет
 Верный ответ: нет
2. Пространство Соболева $W^p_p(G)$ полно при любых $m \in N$ и
 Ответы:
 а) $1 < p < \infty$;
 б) $1 \leq p < \infty$;
 в) $1 \leq p \leq \infty$.
 Верный ответ: в
3. Пространство Соболева $W^p_p(G)$ сепарабельно при любых $m \in N$ и
 Ответы:

- а) $1 < p < \infty$;
- б) $1 \leq p < \infty$;
- в) $1 \leq p \leq \infty$.

Верный ответ: б

4. Пространство Соболева $W_p^p(G)$ рефлексивно при любых $m \in N$ и

Ответы:

- а) $1 < p < \infty$;
- б) $1 \leq p < \infty$;
- в) $1 \leq p \leq \infty$.

Верный ответ: а

5. Верно ли равенство $W_p^{730}(R) = W_p^p(R)$?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

6. Слабое обобщённое решение однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона является функцией класса

Ответы:

- а) W_2^2 ;
- б) C ;
- в) W_2^{730} ;
- г) C .

Верный ответ: в

7. Что достаточно потребовать от непустого подмножества банахова пространства, чтобы любое непрерывное отображение этого множества в себя имело неподвижную точку?

Ответы:

- а) ограниченность
- б) замкнутость
- в) выпуклость
- г) выпуклость и компактность
- д) компактность
- е) замкнутость и выпуклость
- ж) ограниченность и выпуклость

Верный ответ: г

8. Верно ли, что если отображение одного нормированного пространства в другое дифференцируемо в точке по Гато, то оно дифференцируемо в этой точке и по Фреше?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

9. Какие методы позволяют строить приближенные решения краевых задач?

Ответы:

- а) метод Галёркина
- б) принцип неподвижной точки Шаудера
- в) принцип сжимающих отображений
- г) метод Рунге

Верный ответ: а, в, г

10. Вариационный метод исследования разрешимости стационарных задач применим к задачам

Ответы:

- а) со сжимающим оператором
- б) с непрерывным оператором
- в) с непрерывно дифференцируемым оператором

- г) с потенциальным оператором
 - д) с монотонным оператором
- Верный ответ: г

II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» ставится, если студент обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание материалов дисциплины, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, даёт полный исчерпывающий ответ как на основные вопросы билета, так и на дополнительные вопросы экзаменатора.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» ставится, если студент обнаруживает полное знание материалов дисциплины, успешно выполняет предусмотренные программой задания; в ответе имеют место несущественные неточности, которые студент способен исправить самостоятельно, благодаря наводящему вопросу.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает знание материалов дисциплины в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляется с выполнением заданий, предусмотренных программой; в ответе на основные вопросы билета и/или дополнительные вопросы экзаменатора имеются существенные неточности, но студент обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством экзаменатора.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает серьёзные пробелы в знаниях основных материалов дисциплины, допускает принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий.

III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих.