

**Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

Направление подготовки/специальность: 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Наименование образовательной программы: Математическое и компьютерное моделирование

Уровень образования: высшее образование - магистратура

Форма обучения: Очная

**Оценочные материалы
по дисциплине
Прикладной функциональный анализ**

**Москва
2024**

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Разработчик

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Боровиков И.А.
	Идентификатор	R2e186edb-BorovikovIA-68185ef6

И.А.
Боровиков

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель
образовательной
программы

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Черепова М.Ф.
	Идентификатор	R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1

М.Ф.
Черепова

Заведующий
выпускающей кафедрой

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Зубков П.В.
	Идентификатор	R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c

П.В. Зубков

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. РПК-1 Способен разрабатывать и исследовать математические модели естествознания и технологий, а также осуществлять их компьютерную реализацию

ИД-1 Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании

и включает:

для текущего контроля успеваемости:

Форма реализации: Письменная работа

1. Интеграл Римана–Стилтьеса и абсолютно непрерывные функции (Контрольная работа)
2. Пространства Соболева и элементы теории обобщённых функций (Контрольная работа)
3. Функции монотонные и ограниченной вариации (Тестирование)
4. Элементы нелинейного функционального анализа (Контрольная работа)

БРС дисциплины

1 семестр

Перечень контрольных мероприятий текущего контроля успеваемости по дисциплине:

- КМ-1 Функции монотонные и ограниченной вариации (Тестирование)
КМ-2 Интеграл Римана–Стилтьеса и абсолютно непрерывные функции (Контрольная работа)
КМ-3 Пространства Соболева и элементы теории обобщённых функций (Контрольная работа)
КМ-4 Элементы нелинейного функционального анализа (Контрольная работа)

Вид промежуточной аттестации – Экзамен.

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %				
	Индекс КМ:	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4
	Срок КМ:	4	8	12	16
Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции					
Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции		+	+		
Пространства Соболева функций одной действительной переменной					

Пространства Соболева функций одной действительной переменной			+	
Введение в теорию обобщённых функций				
Введение в теорию обобщённых функций			+	
Элементы нелинейного функционального анализа				
Элементы нелинейного функционального анализа				+
Вес КМ:	15	25	40	20

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Индекс компетенции	Индикатор	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Контрольная точка
РПК-1	ИД-1 _{РПК-1} Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании	Знать: терминологию и основные результаты теории функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций терминологию и элементы теории обобщённых функций Уметь: применять теорию пространств Соболева функций одной действительной переменной применять базовые результаты нелинейного функционального анализа	КМ-1 Функции монотонные и ограниченной вариации (Тестирование) КМ-2 Интеграл Римана–Стилтьеса и абсолютно непрерывные функции (Контрольная работа) КМ-3 Пространства Соболева и элементы теории обобщённых функций (Контрольная работа) КМ-4 Элементы нелинейного функционального анализа (Контрольная работа)

II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания

КМ-1. Функции монотонные и ограниченной вариации

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Тестирование

Вес контрольного мероприятия в БРС: 15

Процедура проведения контрольного мероприятия: Тестирование проводится во время планового практического занятия и состоит из 7 вопросов. Для написания работы студенту даётся 20 минут.

Краткое содержание задания:

Тестирование проверяет знание студентом терминологии и основных результатов теории функций, касающихся функций ограниченной вариации.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Знать: терминологию и основные результаты теории функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций	1.Точки дифференцируемости непрерывных функций. 2.Покрытия Витали. 3.Производное число функции. 4.Теорема Лебега о дифференцируемости монотонной функции. 5.Функции ограниченной вариации. 6.Полная вариация функции и её свойства. 7.Связь функций ограниченной вариации с монотонными функциями.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы теста.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные ответы на 6 вопросов теста.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные ответы на 4 или 5 вопросов теста.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если дано менее 4 правильных ответов на вопросы теста.

КМ-2. Интеграл Римана–Стилтьеса и абсолютно непрерывные функции

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 25

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 3 задачи. Для написания работы студенту даётся 45 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет знание студентом основных результатов теории абсолютно непрерывных функций.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Знать: терминологию и основные результаты теории функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций	1. Интеграл Римана–Стилтьеса и его свойства. 2. Абсолютно непрерывные функции и их свойства. 3. Формулы Ньютона–Лейбница и интегрирования по частям для абсолютно непрерывных функций.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 3 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена одна из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполнены условия для выставления более высокой оценки.

КМ-3. Пространства Соболева и элементы теории обобщённых функций

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 40

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 60 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет умение студентом применять основные понятия и результаты теории пространств Соболева одной действительной переменной, а также знание студентом терминологии и базовых результатов теории обобщённых функций.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Знать: терминологию и элементы теории обобщённых функций	1. Пространства основных и обобщённых функций. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. 2. Операции над обобщёнными функциями.
Уметь: применять теорию пространств Соболева функций одной действительной переменной	1. Обобщённые производные по Соболеву и их свойства. Пространства Соболева. 2. Теоремы вложения.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если решено менее двух из предложенных задач.

КМ-4. Элементы нелинейного функционального анализа

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 20

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 2 задачи. Для написания работы студенту даётся 30 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет умение студентом применять базовые результаты нелинейного функционального анализа.

Контрольные вопросы/задания:

Запланированные результаты обучения по дисциплине	Вопросы/задания для проверки
Уметь: применять базовые результаты нелинейного функционального анализа	1. Оператор Немыцкого. 2. Теоремы Брауэра и Шаудера о неподвижной точке.

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены обе задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решена одна из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена одна из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если полностью не решена ни одна из предложенных задач.

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

1. Обобщённая производная по Соболеву и усреднение.
2. Теорема Брауэра и лемма об остром угле.

Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса из программы экзамена. На подготовку к ответу студенту даётся 60 минут. Во время ответа студенту могут быть заданы дополнительные вопросы по программе экзамена.

1. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины

1. Компетенция/Индикатор: ИД-1_{РПК-1} Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании

Вопросы, задания

1. Обобщённая производная по Соболеву и усреднение.
2. Пространства Соболева $W_p^m(a,b)$ и их общие свойства.
3. Изоморфизмы $W_1^1(a,b) \cong AC[a,b]$ и $W_\infty^1(a,b) \cong Lip[a,b]$.
4. Вложения $W_p^m(a,b) \subset C^{\{m-1\}}[a,b]$.
5. Вложения $W_p^m(a,b) \subset C^{\{m-1, 1/p'\}}[a,b]$.
6. Компактность вложений $W_p^m(a,b) \subset C^{\{m-1\}}[a,b]$.
7. Компактность вложений $W_p^m(a,b) \subset W_q^{\{m-1\}}(a,b)$.
8. Эквивалентные нормы на пространстве $W_p^1(a,b)$.
9. Пространство $W_p^\circ(a,b)$.
10. Разложение в ряд Фурье функций из $W_2^1(-a,a)$, $W_2^1(0,a)$ и $W_2^\circ(0,a)$.
11. Пространство основных функций $D(a,b)$.
12. Пространство Шварца.
13. Обобщённые функции.
14. Регулярные и сингулярные обобщённые функции.
15. Операции над обобщёнными функциями.
16. Простейшие уравнения в обобщённых функциях.
17. Обобщённая производная произведения функций.
18. Критерий постоянства суммируемой функции в терминах обобщённой производной по Соболеву.
19. Обобщённая производная по Соболеву и её элементарные свойства.
20. Теорема Лебега о дифференцируемости монотонной функции.
21. Интегрируемость производной монотонной функции по Лебегу и «неравенство Ньютона–Лейбница».
22. Производное число функции. Оценки внешней меры образа множества при монотонном отображении.
23. Функции ограниченной вариации. Элементарные свойства полной вариации. Нормированная алгебра $BV[a,b]$.

24. Полнота нормированной алгебры $BV[a, b]$.
25. Свойства полной вариации с переменным верхним пределом. Представление функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций и следствия этого представления.
26. Принцип выбора Хелли.
27. Интеграл Римана–Стилтьеса и его простейшие свойства: билинейность и аддитивность по отрезку интегрирования.
28. «Интегрирование по частям» в интеграле Римана–Стилтьеса. Интегрируемость непрерывной функции по функции ограниченной вариации.
29. Интеграл Римана–Стилтьеса непрерывной функции по функции, обладающей интегрируемой по Риману производной. Вычисление интеграла Римана–Стилтьеса непрерывной функции по кусочно-постоянной функции.
30. Предельный переход под знаком интеграла Римана–Стилтьеса.
31. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на $C[a, b]$.
32. Покрывтия в смысле Витали. Теорема Витали и её следствие.
33. Критерий постоянства абсолютно непрерывной функции.
34. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница.
35. Полная вариация абсолютно непрерывной функции.
36. Функции скачков и их свойства.
37. Каноническое разложение функции ограниченной вариации.
38. Критерий абсолютной непрерывности непрерывной монотонной функции.
39. Вычисление интеграла Римана–Стилтьеса непрерывной функции по функции скачков.
40. Вычисление интеграла Римана–Стилтьеса непрерывной функции и функции ограниченной вариации по абсолютно непрерывной функции. Формула «интегрирования по частям» для абсолютно непрерывных функций.
41. Критерий монотонности функции в терминах производных чисел и его обобщение.
42. Критерий абсолютной непрерывности дифференцируемой функции. Критерий абсолютной непрерывности обобщённой первообразной.
43. Абсолютно непрерывные функции и их простейшие свойства: алгебра $AC[a, b]$, конечность полной вариации, абсолютная непрерывность композиции.
44. Условие Каратеодори и оператор Немыцкого.
45. Теорема Брауэра и лемма об остром угле.
46. Проекторы Шаудера и их свойства. Теорема Шаудера о неподвижной точке (принцип Шаудера).
47. Следствия принципа Шаудера. Теорема Лере–Шаудера.

Материалы для проверки остаточных знаний

1. Верно ли, что любая непрерывная функция является функцией ограниченной вариации?
 Ответы:
 да, нет
 Верный ответ: нет
2. Верно ли, что любая абсолютно непрерывная функция является функцией ограниченной вариации?
 Ответы:
 да, нет
 Верный ответ: да
3. Функции каких из перечисленных ниже классов дифференцируемы почти всюду?
 Ответы:
 а) непрерывные
 б) липшицевы
 в) ограниченные

- г) абсолютно непрерывные
- д) ограниченной вариации
- е) монотонные

Верный ответ: б, г, д, е

4. Верно ли, что пространства Соболева $W_{p^m}(a,b)$ полны при любых показателях $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

5. Верно ли, что пространства Соболева $W_{p^m}(a,b)$ сепарабельны при любых показателях $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

6. Верно ли, что если функция $f \in L_1(a,b)$ обладает обобщённой по Соболеву производной на интервале (a,b) , то у функции f на (a,b) существует классическая производная почти всюду?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

7. Обобщённая функция — это

Ответы:

- а) локально суммируемая функция, у которой существует обобщённая по Соболеву производная.
- б) локально суммируемая функция.
- в) линейный непрерывный функционал на пространстве основных (пробных) функций.
- г) линейный функционал на пространстве основных (пробных) функций.

Верный ответ: в)

8. Верно ли, что любая обобщённая функция дифференцируема бесконечное число раз в обобщённом смысле?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

9. Что достаточно потребовать от непустого множества $A \subset \mathbb{R}^n$, чтобы любое непрерывное отображение этого множества в себя имело неподвижную точку?

Ответы:

- а) ограниченность
- б) замкнутость
- в) выпуклость
- г) выпуклость и компактность
- д) компактность
- е) замкнутость и выпуклость
- ж) ограниченность и выпуклость

Верный ответ: г

10. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ — метрическое пространство. Отображение $f: X \rightarrow X$ называется *сжимающим*, если

Ответы:

- а) $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$ для любых точек $x, y \in X$; б) $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ для любых точек $x, y \in X$; в) существует число $0 \leq \alpha < 1$ такое, что $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$ для любых точек $x, y \in X$; г) существует число $\alpha > 1$ такое, что $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$ для любых точек $x, y \in X$; д) существует число $0 \leq \alpha < 1$ такое, что $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$ для любых точек $x, y \in X$

Верный ответ: д

II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5 («отлично»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» ставится, если студент обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание материалов дисциплины, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, даёт полный исчерпывающий ответ как на основные вопросы билета, так и на дополнительные вопросы экзаменатора.

Оценка: 4 («хорошо»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» ставится, если студент обнаруживает полное знание материалов дисциплины, успешно выполняет предусмотренные программой задания; в ответе имеют место несущественные неточности, которые студент способен исправить самостоятельно, благодаря наводящему вопросу.

Оценка: 3 («удовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает знание материалов дисциплины в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляется с выполнением заданий, предусмотренных программой; в ответе на основные вопросы билета и/или дополнительные вопросы экзаменатора имеются существенные неточности, но студент обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством экзаменатора.

Оценка: 2 («неудовлетворительно»)

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает серьёзные пробелы в знаниях основных материалов дисциплины, допускает принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий.

III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих.