

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

---

Направление подготовки/специальность: 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Наименование образовательной программы: Математическое и компьютерное моделирование

Уровень образования: высшее образование - магистратура

Форма обучения: Очная

**Рабочая программа дисциплины**  
**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

|   |  |
|---|--|
| <b>Блок:</b>  | Блок 1 «Дисциплины (модули)»                             |
| <b>Часть образовательной программы:</b>                                     | Часть, формируемая участниками образовательных отношений |
| <b>№ дисциплины по учебному плану:</b>                                      | Б4.Ч.02  |
| <b>Трудоемкость в зачетных единицах:</b>                                    | 2 семестр - 2;   |
| <b>Часов (всего) по учебному плану:</b>                                     | 72 часа  |
| <b>Лекции</b>   | 2 семестр - 16 часов;                                    |
| <b>Практические занятия</b>   | 2 семестр - 16 часов;                                    |
| <b>Лабораторные работы</b>  | не предусмотрено учебным планом                          |
| <b>Консультации</b>   | проводится в рамках часов аудиторных занятий             |
| <b>Самостоятельная работа</b>   | 2 семестр - 39,7 часа;                                   |
| <b>в том числе на КП/КР</b>   | не предусмотрено учебным планом                          |
| <b>Иная контактная работа</b>   | проводится в рамках часов аудиторных занятий             |
| <b>включая:</b><br>Проверочная работа<br>Тестирование<br>Контрольная работа |  |
| <b>Промежуточная аттестация:</b>  |  |
| <b>Зачет</b>  | 2 семестр - 0,3 часа;                                    |

**Москва 2023**

**ПРОГРАММУ СОСТАВИЛ:**

Преподаватель

|  |  |                                |
|--|--|--------------------------------|
|  | Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» |                                |
|  | Сведения о владельце ЦЭП МЭИ                       |                                |
|  | Владелец   | Боровиков И.А.                 |
|  | Идентификатор                                      | R2e186edb-BorovikovIA-68185ef6 |

И.А. Боровиков

**СОГЛАСОВАНО:**

Руководитель  
образовательной программы

|  |  |                               |
|--|--|-------------------------------|
|  | Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» |                               |
|  | Сведения о владельце ЦЭП МЭИ                       |                               |
|  | Владелец   | Черепова М.Ф.                 |
|  | Идентификатор                                      | R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1 |

М.Ф. Черепова

Заведующий выпускающей  
кафедрой

|  |  |                             |
|--|--|-----------------------------|
|  | Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» |                             |
|  | Сведения о владельце ЦЭП МЭИ                       |                             |
|  | Владелец   | Зубков П.В.                 |
|  | Идентификатор                                      | R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c |

П.В. Зубков

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

**Цель освоения дисциплины:** изучение постановок задач и базовых результатов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, основанных на применении методов теории функций и функционального анализа

### Задачи дисциплины

- изучение основ теории пространств Соболева;
- изучение основ теории обобщённых решений эллиптических краевых задач;
- изучение основ теории обобщённых решений параболических начально-краевых задач.

Формируемые у обучающегося **компетенции** и запланированные **результаты обучения** по дисциплине, соотнесенные с **индикаторами достижения компетенций**:

| Код и наименование компетенции  | Код и наименование индикатора достижения компетенции  | Запланированные результаты обучения  |
|---|---|--|
| РПК-1 Способен разрабатывать и исследовать математические модели естествознания и технологий, а также осуществлять их компьютерную реализацию | ИД-1 <sub>РПК-1</sub> Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого при математическом и компьютерном моделировании | знать:<br>- терминологию и базовые результаты теории пространств Соболева.<br><br>уметь:<br>- исследовать простейшие свойства обобщённых решений параболических начально-краевых задач;<br>- исследовать простейшие свойства обобщённых решений эллиптических краевых задач. |

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ВО

Дисциплина относится к факультативным дисциплинам основной профессиональной образовательной программе Математическое и компьютерное моделирование (далее – ОПОП), направления подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика, уровень образования: высшее образование - магистратура.

Базируется на уровне высшего образования (бакалавриат, специалитет).

Результаты обучения, полученные при освоении дисциплины, необходимы при выполнении выпускной квалификационной работы.

### 3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 3.1 Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы, 72 часа.

| № п/п | Разделы/темы дисциплины/формы промежуточной аттестации       | Всего часов на раздел | Семестр | Распределение трудоемкости раздела (в часах) по видам учебной работы |     |    |              |   |     |    |    |                   |                                   | Содержание самостоятельной работы/ методические указания  |  |
|-------|--|-----------------------|---------|--|-----|----|--------------|---|-----|----|----|-------------------|-----------------------------------|---|--|
|       |  |                       |         | Контактная работа  |     |    |              |   |     |    | СР |                   |                                   |   |  |
|       |  |                       |         | Лек  | Лаб | Пр | Консультация |   | ИКР |    | ПА | Работа в семестре | Подготовка к аттестации /контроль |   |  |
| КПР   | ГК   | ИККП                  | ТК      |  |     |    |              |   |     |    |    |                   |                                   |   |  |
| 1     | 2  | 3                     | 4       | 5  | 6   | 7  | 8            | 9 | 10  | 11 | 12 | 13                | 14                                | 15  |  |
| 1     | Пространства Соболева  | 19.7                  | 2       | 4  | -   | 4  | -            | - | -   | -  | -  | 11.7              | -                                 | <p><b><u>Подготовка к текущему контролю:</u></b><br/>Изучение материалов по разделу «Пространства Соболева» и подготовка к контрольному опросу и тестированию.</p> <p><b><u>Подготовка домашнего задания:</u></b><br/>Подготовка домашнего задания направлена на отработку умений решения профессиональных задач. Домашнее задание выдается студентам по изученному в разделе «Пространства Соболева» материалу. Дополнительно студенту необходимо изучить литературу и разобрать примеры выполнения подобных заданий.</p> <p><b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b><br/>[1], стр. 166–169<br/>[2], стр. 46–107</p> |  |
| 1.1   | Пространства Соболева  | 19.7                  |         | 4  | -   | 4  | -            | - | -   | -  | -  | 11.7              | -                                 |   |  |
| 2     | Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений | 26                    |         | 6  | -   | 6  | -            | - | -   | -  | -  | -                 | 14                                | -   | <p><b><u>Подготовка домашнего задания:</u></b><br/>Подготовка домашнего задания направлена на отработку умений решения профессиональных задач. Домашнее задание выдается студентам по изученному в разделе «Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений» материалу. Дополнительно студенту необходимо изучить литературу и разобрать примеры выполнения подобных заданий.</p> <p><b><u>Подготовка к контрольной работе:</u></b></p> |
| 2.1   | Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений | 26                    |         | 6  | -   | 6  | -            | - | -   | -  | -  | -                 | 14                                | -   |  |

|     |  |      |    |   |    |   |   |   |   |     |      |   |   |
|-----|--|------|----|---|----|---|---|---|---|-----|------|---|---|
|     |  |      |    |   |    |   |   |   |   |     |      |   | Изучение материалов по разделу «Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений» и подготовка к контрольной работе.<br><b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b><br>[1], стр. 261–264   |
| 3   | Обобщённые решения начально-краевых задач для параболических уравнений | 26   | 6  | - | 6  | - | - | - | - | -   | 14   | - | <b><u>Подготовка домашнего задания:</u></b><br>Подготовка домашнего задания направлена на отработку умений решения профессиональных задач. Домашнее задание выдается студентам по изученному в разделе «Обобщённые решения начально-краевых задач для параболических уравнений» материалу. Дополнительно студенту необходимо изучить литературу и разобрать примеры выполнения подобных заданий.<br><b><u>Подготовка к контрольной работе:</u></b><br>Изучение материалов по разделу «Обобщённые решения начально-краевых задач для параболических уравнений» и подготовка к контрольной работе.<br><b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b><br>[1], стр. 385–387 |
| 3.1 | Обобщённые решения начально-краевых задач для параболических уравнений | 26   | 6  | - | 6  | - | - | - | - | -   | 14   | - |   |
|     | Зачет  | 0.3  | -  | - | -  | - | - | - | - | 0.3 | -    | - |   |
|     | Всего за семестр   | 72.0 | 16 | - | 16 | - | - | - | - | 0.3 | 39.7 | - |   |
|     | Итого за семестр   | 72.0 | 16 | - | 16 | - | - | - | - | 0.3 | 39.7 | - |   |

**Примечание:** Лек – лекции; Лаб – лабораторные работы; Пр – практические занятия; КПП – аудиторные консультации по курсовым проектам/работам; ИККП – индивидуальные консультации по курсовым проектам/работам; ГК- групповые консультации по разделам дисциплины; СР – самостоятельная работа студента; ИКР – иная контактная работа; ТК – текущий контроль; ПА – промежуточная аттестация

## 3.2 Краткое содержание разделов

### 1. Пространства Соболева

#### 1.1. Пространства Соболева

Обобщённые производные. Определения и простейшие свойства. Обобщённые производные и средние функции. Пространство  $W_2^1(G)$ . Определение. Полнота и сепарабельность. Пространство  $W_0^1(G)$ . Неравенство Фридрихса. Приближение функций из  $W_2^1(G)$  гладкими функциями. Продолжение функций из  $W_2^1(G)$  с сохранением класса. Понятие о следах функций из  $W_2^1(G)$ . Теоремы вложения  $W_2^1(G)$  в  $L_q(G)$  и  $L_q(\partial G)$ . Компактность вложений. Эквивалентные нормировки пространства  $W_2^1(G)$ . Неравенство Пуанкаре. Пространства  $W_2^{1/2}(\partial G)$  и  $W_2^{-1}(G)$ .

### 2. Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений

#### 2.1. Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений

Задача Дирихле для общего линейного эллиптического уравнения 2-го порядка. Классическая и обобщённая постановки. Связь между ними. Первое основное неравенство для эллиптических операторов. Теорема существования и единственности обобщённого решения из  $W_0^1(G)$  задачи Дирихле для самосопряжённого эллиптического уравнения. Теорема Лакса–Мильграма–Вишика. Метод Галёркина. Разрешимость по Фредгольму в  $W_0^1(G)$  задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения. Обобщённая постановка задачи на собственные значения для самосопряжённого эллиптического оператора в  $W_0^1(G)$ . Простейшие свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям. Вариационные свойства и минимаксный принцип собственных значений. Краевая задача для эллиптического уравнения с неоднородным условием Дирихле. Другие краевые задачи..

### 3. Обобщённые решения начально-краевых задач для параболических уравнений

#### 3.1. Обобщённые решения начально-краевых задач для параболических уравнений

Начально-краевая задача для общего линейного параболического уравнения 2-го порядка. Классическое решение. Обобщённое решение из  $V_2(Q_T)$ . Леммы Гронуолла и Гронуолла–Беллмана. Теорема существования решения из  $V_2(Q_T)$  и метод Фаэдо–Галёркина: построение приближенных решений, их существование и единственность, равномерная энергетическая оценка, предельный переход. Дробная гладкость по  $t$  обобщённого решения из  $V_2(Q_T)$ . Теорема единственности решения из  $V_2(Q_T)$ .

## 3.3. Темы практических занятий

1. Методы Фаэдо–Галёркина и Фурье для параболических уравнений.;
2. Обобщённые решения из энергетического класса параболических начально-краевых задач.;
3. Метод Галёркина.;
4. Теорема Лакса–Мильграма–Вишика.;
5. Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений.;
6. Пространства Соболева..

## 3.4. Темы лабораторных работ

не предусмотрено

### **3.5 Консультации**

#### *Групповые консультации по разделам дисциплины (ГК)*

1. Обсуждение материалов по разделу «Пространства Соболева».
2. Обсуждение материалов по разделу «Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений».
3. Обсуждение материалов по разделу «Обобщённые решения начально-краевых задач для параболических уравнений».

### **3.6 Тематика курсовых проектов/курсовых работ**

Курсовой проект/ работа не предусмотрены

### 3.7. Соответствие разделов дисциплины и формируемых в них компетенций

| Запланированные результаты обучения по дисциплине<br>(в соответствии с разделом 1)       | Коды индикаторов | Номер раздела дисциплины (в соответствии с п.3.1) |   |   | Оценочное средство (тип и наименование)   |
|--|------------------|---|---|---|---|
|  |                  | 1   | 2 | 3 |   |
| <b>Знать:</b>  |                  |   |   |   |   |
| терминологию и базовые результаты теории пространств Соболева                            | ИД-1РПК-1        | +   |   |   | Проверочная работа/Обобщённые производные и их свойства<br>Тестирование/Пространства Соболева |
| <b>Уметь:</b>  |                  |   |   |   |   |
| исследовать простейшие свойства обобщённых решений эллиптических краевых задач           | ИД-1РПК-1        |   | + |   | Контрольная работа/Обобщённые решения эллиптических уравнений                                 |
| исследовать простейшие свойства обобщённых решений параболических начально-краевых задач | ИД-1РПК-1        |   |   | + | Контрольная работа/Обобщённые решения параболических уравнений                                |



#### **4. КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ)**

##### **4.1. Текущий контроль успеваемости**

**2 семестр**

Форма реализации: Билеты (письменный опрос)

1. Обобщённые производные и их свойства (Проверочная работа)

Форма реализации: Письменная работа

1. Обобщённые решения параболических уравнений (Контрольная работа)
2. Обобщённые решения эллиптических уравнений (Контрольная работа)
3. Пространства Соболева (Тестирование)

Балльно-рейтинговая структура дисциплины является приложением А.

##### **4.2 Промежуточная аттестация по дисциплине**

*Зачет (Семестр №2)*

Оценка определяется по совокупности результатов текущего контроля успеваемости в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ»

В диплом выставляется оценка за 2 семестр.

**Примечание:** Оценочные материалы по дисциплине приведены в фонде оценочных материалов ОПОП.

#### **5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

##### **5.1 Печатные и электронные издания:**

1. В. П. Михайлов- "Дифференциальные уравнения в частных производных", Издательство: "Наука", Москва, 1976 - (391 с.)  
<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468230>;
2. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев ; Ред. О. А. Олейник . – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1988 . – 336 с. - ISBN 5-02-013756-1 ..

##### **5.2 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:**

1. СДО "Прометей";
2. Office / Российский пакет офисных программ;
3. Windows / Операционная система семейства Linux;
4. Видеоконференции (Майнд, Сберджаз, ВК и др);
5. Latex.

##### **5.3 Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:**

1. ЭБС Лань - <https://e.lanbook.com/>
2. ЭБС "Университетская библиотека онлайн" - [http://biblioclub.ru/index.php?page=main\\_ub\\_red](http://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red)
3. Электронная библиотека МЭИ (ЭБ МЭИ) - <http://elib.mpei.ru/login.php>

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

| Тип помещения   | Номер аудитории, наименование                | Оснащение  |
|---|--|--|
| Учебные аудитории для проведения лекционных занятий и текущего контроля | М-710а, Учебная аудитория каф. МКМ           | стол, стул, доска меловая  |
|   | Ж-120, Машинный зал ИВЦ                      | сервер, кондиционер  |
| Учебные аудитории для проведения практических занятий, КР и КП          | М-710а, Учебная аудитория каф. МКМ           | стол, стул, доска меловая  |
|   | Ж-120, Машинный зал ИВЦ                      | сервер, кондиционер  |
| Учебные аудитории для проведения промежуточной аттестации               | М-710а, Учебная аудитория каф. МКМ           | стол, стул, доска меловая  |
|   | Ж-120, Машинный зал ИВЦ                      | сервер, кондиционер  |
| Помещения для самостоятельной работы                                    | НТБ-201, Компьютерный читальный зал          | стол компьютерный, стул, стол письменный, вешалка для одежды, компьютерная сеть с выходом в Интернет, компьютер персональный, принтер, кондиционер   |
| Помещения для консультирования  | М-714, Преподавательская каф. МКМ            | рабочее место сотрудника, стул, шкаф, шкаф для документов, шкаф для одежды, тумба, доска меловая, компьютерная сеть с выходом в Интернет, мультимедийный проектор, экран, книги, учебники, пособия |
| Помещения для хранения оборудования и учебного инвентаря                | М-713/1, Учебно-научная лаборатория каф. МКМ | рабочее место сотрудника, стул, шкаф, шкаф для одежды, тумба, компьютерная сеть с выходом в Интернет, компьютер персональный, книги, учебники, пособия   |

## БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВАЯ СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

## Краевые задачи математической физики

(название дисциплины)

## 2 семестр

**Перечень контрольных мероприятий текущего контроля успеваемости по дисциплине:**

КМ-1 Обобщённые производные и их свойства (Проверочная работа)

КМ-2 Пространства Соболева (Тестирование)

КМ-3 Обобщённые решения эллиптических уравнений (Контрольная работа)

КМ-4 Обобщённые решения параболических уравнений (Контрольная работа)

**Вид промежуточной аттестации – Зачет.**

| Номер раздела | Раздел дисциплины  | Индекс КМ: | КМ-1 | КМ-2 | КМ-3 | КМ-4 |
|---------------|--|------------|------|------|------|------|
|               |  | Неделя КМ: | 4    | 8    | 12   | 15   |
| 1             | Пространства Соболева  |            |      |      |      |      |
| 1.1           | Пространства Соболева  |            | +    | +    |      |      |
| 2             | Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений           |            |      |      |      |      |
| 2.1           | Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений           |            |      |      | +    |      |
| 3             | Обобщённые решения начально-краевых задач для параболических уравнений |            |      |      |      |      |
| 3.1           | Обобщённые решения начально-краевых задач для параболических уравнений |            |      |      |      | +    |
| Вес КМ, %:    |  |            | 15   | 15   | 35   | 35   |