

**Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

Направление подготовки/специальность: 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Наименование образовательной программы: Математическое моделирование

Уровень образования: высшее образование - магистратура

Форма обучения: Очная

**Оценочные материалы
по дисциплине
Дополнительные главы теории функций и функционального анализа**

**Москва
2021**

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Преподаватель

(должность)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Боровиков И.А.
Идентификатор	R2e186edb-BorovikovIA-68185ef6	

(подпись)

И.А.

Боровиков

(расшифровка
подписи)

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель
образовательной
программы

(должность, ученая степень, ученое
звание)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Черепова М.Ф.
Идентификатор	R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1	

(подпись)

М.Ф.

Черепова

(расшифровка
подписи)

Заведующий
выпускающей кафедры

(должность, ученая степень, ученое
звание)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Зубков П.В.
Идентификатор	R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c	

(подпись)

П.В. Зубков

(расшифровка
подписи)

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки: достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. ПК-1 Способен создавать, исследовать и реализовывать математические модели естествознания и технологий

ИД-1 Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого для описания информационных и математических моделей

и включает:

для текущего контроля успеваемости:

Форма реализации: Письменная работа

1. Пространства Соболева (функции одной вещественной переменной) (Контрольная работа)
2. Топологические пространства (Контрольная работа)
3. Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции (Тестирование)
4. Элементы теории обобщённых функций (Тестирование)

БРС дисциплины

1 семестр

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %				
	Индекс КМ:	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4
	Срок КМ:	4	8	12	15
Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции					
Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции	+				
Пространства Соболева $W_p^l(a,b)$					
Пространства Соболева $W_p^l(a,b)$			+		
Введение в теорию обобщённых функций					
Введение в теорию обобщённых функций				+	
Топологические пространства					
Топологические пространства					+
	Вес КМ:	25	25	20	30

§Общая часть/Для промежуточной аттестации§

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Индекс компетенции	Индикатор	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Контрольная точка
ПК-1	ИД-1 _{ПК-1} Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого для описания информационных и математических моделей	Знать: терминологию и основные результаты теории функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций терминологию и элементы теории обобщённых функций Уметь: применять теорию пространств Соболева функций одной вещественной переменной применять базовые понятия и результаты теории топологических пространств	Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции (Тестирование) Пространства Соболева (функции одной вещественной переменной) (Контрольная работа) Элементы теории обобщённых функций (Тестирование) Топологические пространства (Контрольная работа)

II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания

КМ-1. Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Тестирование

Вес контрольного мероприятия в БРС: 25

Процедура проведения контрольного мероприятия: Тестирование проводится во время планового практического занятия и состоит из 8 вопросов. Для написания работы студенту даётся 25 минут.

Краткое содержание задания:

Тестирование проверяет знание студентом терминологии и основных результатов теории функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: терминологию и основные результаты теории функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций	<ol style="list-style-type: none">1. Точки дифференцируемости непрерывных функций.2. Теорема Лебега о дифференцируемости монотонной функции.3. Функции ограниченной вариации.4. Полная вариация функции и её свойства.5. Связь функций ограниченной вариации с монотонными функциями.6. Интеграл Римана–Стилтьеса и его свойства.7. Абсолютно непрерывные функции.8. Формулы Ньютона–Лейбница и интегрирования по частям для абсолютно непрерывных функций.
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы теста.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные ответы на 7 вопросов теста.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные ответы на 5 или 6 вопросов теста.

КМ-2. Пространства Соболева (функции одной вещественной переменной)

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 25

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 3 задачи. Для написания работы студенту даётся 45 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет умение студентом применять понятия и результаты теории пространств Соболева одной вещественной переменной.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: применять теорию пространств Соболева функций одной вещественной переменной	1.Обобщённые производные по Соболеву и их свойства. 2.Пространства Соболева и их свойства. 3.Теоремы вложения.
------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 3 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решена 1 из предложенных задач и изложен правильный план решения ещё одной задачи, который реализован частично.

КМ-3. Элементы теории обобщённых функций

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Тестирование

Вес контрольного мероприятия в БРС: 20

Процедура проведения контрольного мероприятия: Тестирование проводится во время планового практического занятия и состоит из 5 вопросов. Для написания работы студенту даётся 15 минут.

Краткое содержание задания:

Тестирование проверяет знание студентом терминологии и базовых результатов теории обобщённых функций.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: терминологию и элементы теории обобщённых функций	1.Пространства основных и обобщённых функций. 2.Регулярные и сингулярные обобщённые функции. 3.Операции над обобщёнными функциями. 4.Быстро убывающие функции и медленно растущие обобщённые функции. 5.Простейшие уравнения в обобщённых функциях.
----------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы теста.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные ответы на 4 вопроса теста.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные ответы на 3 вопроса теста.

КМ-4. Топологические пространства

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 30

Процедура проведения контрольного мероприятия: Задание на контрольную работу выдаётся во время планового практического занятия. Контрольная работа содержит 4 задачи. Для написания работы студенту даётся 45 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа проверяет умение студентом применять базовые понятия и результаты теории топологических пространств.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: применять базовые понятия и результаты теории топологических пространств	<ol style="list-style-type: none">1.Топологические пространства. Топологии. Сравнение топологий.2.Открытые и замкнутые множества. Внутренность, замыкание, граница, производное множество.3.Непрерывные отображения топологических пространств. Аксиомы отделимости.4.Компактность. Связность.
---------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» выставляется, если решены все 4 задачи с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» выставляется, если решены 3 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены 2 из предложенных задач с возможными несущественными погрешностями.

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

1. Принцип выбора Хелли.
2. Компактность в топологических пространствах. Непрерывные отображения компактных пространств.

Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса из программы экзамена. На подготовку к ответу студенту даётся 60 минут. Во время ответа студенту могут быть заданы дополнительные вопросы по программе экзамена.

1. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины

1. Компетенция/Индикатор: ИД-1ПК-1 Демонстрирует знание современного математического аппарата, используемого для описания информационных и математических моделей

Вопросы, задания

- 1.Обобщённая производная по Соболеву и усреднение.
- 2.Пространства Соболева $W_p^m(a,b)$ и их общие свойства.
- 3.Изоморфизмы $W_1^1(a,b) \cong AC[a,b]$ и $W_\infty^1(a,b) \cong Lip[a,b]$.
- 4.Вложения $W_p^m(a,b) \subset C^{m-1}[a,b]$.
- 5.Вложения $W_p^m(a,b) \subset C^{m-1,1/p}[a,b]$.
- 6.Компактность вложений $W_p^m(a,b) \subset C^{m-1}[a,b]$.
- 7.Компактность вложений $W_p^m(a,b) \subset W_q^{m-1}(a,b)$.
- 8.Эквивалентные нормы на пространстве $W_p^1(a,b)$.
- 9.Пространство $W_p^1(a,b)$.
- 10.Разложение в ряд Фурье функций из $W_2^1(-a,a)$, $W_2^1(0,a)$ и $W_2^1(0,a)$.
- 11.Пространство основных функций $D(a,b)$.
- 12.Пространство Шварца.
- 13.Обобщённые функции.
- 14.Регулярные и сингулярные обобщённые функции.
- 15.Операции над обобщёнными функциями.
- 16.Простейшие уравнения в обобщённых функциях.
- 17.Топологические пространства. Топологии. Открытые и замкнутые множества.
- 18.Замыкание множества и его свойства. Внутренность множества и его свойства.
- 19.Сравнение топологий. Базы. Аксиомы счётности. Подпространства. Индуцированные топологии.
- 20.Сходимость последовательностей в топологических пространствах. Непрерывные отображения топологических пространств. Открытые и замкнутые отображения. Гомеоморфизмы.
- 21.Связность. Достаточные условия связности. Связные множества на прямой и в конечномерном пространстве. Непрерывные отображения связных топологических пространств.

22. Аксиомы отделимости. T_1 , T_2 , T_3 и T_4 пространства.
23. Большая лемма Урысона и теорема Титце–Урысона.
24. Различные способы задания топологии. Метризуемость.
25. Обобщённая производная произведения функций.
26. Критерий постоянства суммируемой функции в терминах обобщённой производной по Соболеву.
27. Топологические линейные пространства. Счётно-нормированные пространства. Слабая топология и слабая сходимость.
28. Обобщённая производная по Соболеву и её элементарные свойства.
29. Лемма Рисса для непрерывной функции и для функции, имеющей односторонние пределы в каждой точке.
30. Теорема Лебега о дифференцируемости монотонной функции.
31. Интегрируемость производной монотонной функции по Лебегу и «неравенство Ньютона–Лейбница».
32. Функции ограниченной вариации. Элементарные свойства полной вариации. Нормированная алгебра $BV[a, b]$.
33. Полнота нормированной алгебры $BV[a, b]$.
34. Свойства полной вариации с переменным верхним пределом. Представление функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций и следствия этого представления.
35. Принцип выбора Хелли.
36. Интеграл Римана–Стилтьеса и его простейшие свойства: билинейность и аддитивность по отрезку интегрирования.
37. «Интегрирование по частям» в интеграле Римана–Стилтьеса. Интегрируемость непрерывной функции по функции ограниченной вариации.
38. Интеграл Римана–Стилтьеса непрерывной функции по функции, обладающей интегрируемой по Риману производной. Вычисление интеграла Римана–Стилтьеса непрерывной функции по кусочно-постоянной функции.
39. Предельный переход под знаком интеграла Римана–Стилтьеса.
40. Компактность в топологических пространствах. Непрерывные отображения компактных пространств.
41. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на $C[a, b]$.
42. Покрытия в смысле Витали. Теорема Витали и её следствие.
43. Критерий постоянства абсолютно непрерывной функции.
44. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница.
45. Полная вариация абсолютно непрерывной функции.
46. Функции скачков и их свойства.
47. Каноническое разложение функции ограниченной вариации.
48. Критерий абсолютной непрерывности непрерывной монотонной функции.
49. Вычисление интеграла Римана–Стилтьеса непрерывной функции по функции скачков.
50. Вычисление интеграла Римана–Стилтьеса непрерывной функции и функции ограниченной вариации по абсолютно непрерывной функции. Формула «интегрирования по частям» для абсолютно непрерывных функций.
51. Критерий монотонности функции и его обобщение.
52. Критерий абсолютной непрерывности дифференцируемой функции. Критерий абсолютной непрерывности обобщённой первообразной.
53. Абсолютно непрерывные функции и их простейшие свойства: алгебра $AC[a, b]$, конечность полной вариации, абсолютная непрерывность композиции.

Материалы для проверки остаточных знаний

1. Верно ли, что любая непрерывная функция является функцией ограниченной вариации?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

2. Верно ли, что любая абсолютно непрерывная функция является функцией ограниченной вариации?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

3. Функции каких из перечисленных ниже классов дифференцируемы почти всюду?

Ответы:

- а) непрерывные
- б) липшицевы
- в) ограниченные
- г) абсолютно непрерывные
- д) ограниченной вариации
- е) монотонные

Верный ответ: б), г), д), е)

4. Верно ли, что пространства Соболева $W_p^m(a,b)$ полны при любых показателях $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

5. Верно ли, что пространства Соболева $W_p^m(a,b)$ сепарабельны при любых показателях $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: нет

6. Верно ли, что если функция $f \in L_1(a,b)$ обладает обобщённой по Соболеву производной на интервале (a,b) , то у функции f на (a,b) существует классическая производная почти всюду?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

7. Обобщённая функция — это

Ответы:

- а) локально суммируемая функция, у которой существует обобщённая по Соболеву производная.
- б) локально суммируемая функция.
- в) линейный непрерывный функционал на пространстве основных (пробных) функций.
- г) линейный функционал на пространстве основных (пробных) функций.

Верный ответ: в)

8. Верно ли, что любая обобщённая функция дифференцируема бесконечное число раз в обобщённом смысле?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

9. Расположите в порядке убывания общности следующие понятия.

Ответы:

- 1) метрическое пространство
- 2) пространство со скалярным умножением
- 3) топологическое пространство
- 4) нормированное пространство

Верный ответ: 3), 1), 4), 2)

10. В каком топологическом пространстве у любой последовательности может быть только один предел?

Ответы:

- а) В любом.
- б) В любом T1-пространстве.
- в) В любом пространстве со счётной базой.
- г) В любом T2-пространстве.

Верный ответ: г)

11. Верно ли, что образ любого компактного множества при непрерывном отображении компактен?

Ответы:

да, нет

Верный ответ: да

II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «отлично» ставится, если студент обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание материалов дисциплины, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, даёт полный исчерпывающий ответ как на основные вопросы билета, так и на дополнительные вопросы экзаменатора.

Оценка: 4

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «хорошо» ставится, если студент обнаруживает полное знание материалов дисциплины, успешно выполняет предусмотренные программой задания; в ответе имеют место несущественные неточности, которые студент способен исправить самостоятельно, благодаря наводящему вопросу.

Оценка: 3

Описание характеристики выполнения знания: Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает знание материалов дисциплины в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляется с выполнением заданий, предусмотренных программой; в ответе на основные вопросы билета и/или дополнительные вопросы экзаменатора имеются существенные неточности, но студент обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством экзаменатора.

III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих.