

**Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

Направление подготовки/специальность: 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Наименование образовательной программы: Математическое моделирование

Уровень образования: высшее образование - магистратура

Форма обучения: Очная

**Оценочные материалы
по дисциплине
Математическое моделирование в оптимальном управлении**

**Москва
2021**

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Преподаватель

(должность)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Зубков П.В.
	Идентификатор	R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c

(подпись)

П.В. Зубков

(расшифровка
подписи)

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель
образовательной
программы

(должность, ученая степень, ученое
звание)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Черепова М.Ф.
	Идентификатор	R9267877e-CherepovaMF-dbb9bf1

(подпись)

М.Ф.
Черепова

(расшифровка
подписи)

Заведующий
выпускающей кафедры

(должность, ученая степень, ученое
звание)

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Зубков П.В.
	Идентификатор	R4920bc6f-ZubkovPV-8172426c

(подпись)

П.В. Зубков

(расшифровка
подписи)

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки: достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. ПК-1 Способен создавать, исследовать и реализовывать математические модели естествознания и технологий

ИД-3 Демонстрирует знание терминологии, основных понятий и методов решения прикладных задач

ИД-5 Применяет современные методы исследования математических моделей

ИД-6 Разрабатывает и исследует алгоритмы численного решения прикладных задач

и включает:

для текущего контроля успеваемости:

Форма реализации: Защита задания

1. Оптимальное управление процессом колебания струны (Лабораторная работа)

2. Оптимальное управление процессом нагрева стержня (Лабораторная работа)

Форма реализации: Письменная работа

1. Методы минимизации функционалов (Контрольная работа)

2. Функционалы. Необходимые и достаточные условия экстремума (Контрольная работа)

БРС дисциплины

3 семестр

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %				
	Индекс КМ:	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4
	Срок КМ:	4	8	12	15
Градиент. Условия оптимальности.					
Градиент. Условия оптимальности.	+				
Методы минимизации функционалов.					
Методы минимизации функционалов.		+			
Математическое моделирование оптимального управления процессом нагрева стержня.					
Математическое моделирование оптимального управления процессом нагрева стержня.		+	+		
Математическое моделирование оптимального управления процессами, описываемыми системой первого порядка с частными производными.					

Математическое моделирование оптимального управления процессами, описываемыми системой первого порядка с частными производными.			+	
Математическое моделирование оптимального управления колебательными процессами.				
Математическое моделирование оптимального управления колебательными процессами.				+
Методы решения некорректных экстремальных задач				
Методы решения некорректных экстремальных задач				+
Вес КМ:	20	20	30	30

\$Общая часть/Для промежуточной аттестации\$

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Индекс компетенции	Индикатор	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Контрольная точка
ПК-1	ИД-3 _{ПК-1} Демонстрирует знание терминологии, основных понятий и методов решения прикладных задач	Знать: терминологию, основные понятия и методы оптимального управления подход к получению сопряженной краевой задачи для задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными	Функционалы. Необходимые и достаточные условия экстремума (Контрольная работа) Методы минимизации функционалов (Контрольная работа)
ПК-1	ИД-5 _{ПК-1} Применяет современные методы исследования математических моделей	Уметь: исследовать и применять численные методы для решения задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными	Оптимальное управление процессом нагрева стержня (Лабораторная работа)
ПК-1	ИД-6 _{ПК-1} Разрабатывает и исследует алгоритмы численного решения прикладных задач	Уметь: разрабатывать и исследовать алгоритмы численного решения	Оптимальное управление процессом колебания струны (Лабораторная работа)

		некорректных экстремальных задач	
--	--	-------------------------------------	--

II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания

КМ-1. Функционалы. Необходимые и достаточные условия экстремума

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 20

Процедура проведения контрольного мероприятия: Работа выполняется по вариантам на практическом занятии. В задание входит 2 вопроса. Время на проведение 45 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа ориентирована на проверку знаний на необходимые и достаточные условия экстремума функционалов

Контрольные вопросы/задания:

Знать: терминологию, основные понятия и методы оптимального управления	<ol style="list-style-type: none">1. Доказать, что заданный функционал дифференцируем на соответствующем функциональном пространстве2. Доказать, что заданный функционал дважды дифференцируем на соответствующем функциональном пространстве3. Получить необходимое условие экстремума для заданного функционала4. Получить условие оптимальности для заданного функционала
--	---

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 90

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто, выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено

КМ-2. Методы минимизации функционалов

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Контрольная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 20

Процедура проведения контрольного мероприятия: Работа выполняется по вариантам на практическом занятии. В задание входит 2 вопроса. Время на проведение 45 минут.

Краткое содержание задания:

Контрольная работа ориентирована на проверку знаний подхода к получению сопряженной краевой задачи для задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными, и методов минимизации функционалов.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: подход к получению сопряженной краевой задачи для задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными	<ol style="list-style-type: none">1.Получить сопряженную краевую задачу для задачи граничного управления процессом нагрева стержня при финальном наблюдении2.Получить сопряженную краевую задачу для задачи распределенного управления процессом нагрева стержня с минимальной энергией3.Получить сопряженную краевую задачу для задачи стартового управления процессом нагрева стержня при финальном наблюдении4.Описать метод проекции градиента для задачи граничного управления процессом нагрева стержня при финальном наблюдении5.Описать метод условного градиента для задачи распределенного управления процессом нагрева стержня при финальном наблюдении
---	--

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 90

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто, выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено

КМ-3. Оптимальное управление процессом нагрева стержня

Формы реализации: Защита задания

Тип контрольного мероприятия: Лабораторная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 30

Процедура проведения контрольного мероприятия: Выполняется индивидуальная защита выполненной лабораторной работы. В рамках защиты оценивается выполнение работы, полнота ответов на теоретические и практические вопросы. Время защиты составляет не более 20 минут на одного студента. На защиту представляется отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе выполняется на компьютере в машинописной форме и должен содержать следующие материалы: постановка задачи, необходимый теоретический материал, решение поставленной задачи, анализ полученных результатов, графический материал, тексты программ. Минимальный объем отчета по лабораторной работе составляет 10 страниц.

Краткое содержание задания:

Имеется однородный стержень $0 \leq s \leq 1$, левый конец $s=0$ которого теплоизолирован, на правом конце $s=1$ происходит теплообмен с внешней средой, и кроме того, в стержне имеются источники (или стоки) тепла. Через $x=x(s,t)$ обозначим температуру стержня в точке s в момент t . Пусть $x(s,0)=\varphi(s)$, $0 \leq s \leq 1$ – распределение температуры в стержне в начальный момент $t=0$. Требуется, управляя температурой внешней среды и плотностью источников тепла в стержне, к заданному моменту времени $T>0$ распределение температуры в стержне сделать как можно ближе к заданному распределению $y(s)$, $0 \leq s \leq 1$. Требуется реализовать оптимальное управление в задаче по функции, указанной в варианте индивидуального задания, соответствующим методом минимизации с различными способами выбора шага спуска. Сравнить способы выбора шага спуска по числу итераций с разными вариантами входных данных. Объяснить полученные результаты.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: исследовать и применять численные методы для решения задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными	<ol style="list-style-type: none">1. Построить неявную разностную схему для уравнения теплопроводности. Провести аппроксимацию краевых условий.2. Вывести основные формулы численного интегрирования и найти априорные оценки погрешностей для них.3. Применить метод проекции градиента при решении экстремальной задачи.4. Применить метод условного градиента при решении экстремальной задачи.
--	---

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 90

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто, выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено

КМ-4. Оптимальное управление процессом колебания струны

Формы реализации: Защита задания

Тип контрольного мероприятия: Лабораторная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 30

Процедура проведения контрольного мероприятия: Выполняется индивидуальная защита выполненной лабораторной работы. В рамках защиты оценивается выполнение работы, полнота ответов на теоретические и практические вопросы. Время защиты составляет не более 20 минут на одного студента. На защиту представляется отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе выполняется на компьютере в машинописной форме и должен содержать следующие материалы: постановка задачи, необходимый теоретический материал,

решение поставленной задачи, анализ полученных результатов, графический материал, тексты программ. Минимальный объем отчета по лабораторной работе составляет 10 страниц.

Краткое содержание задания:

Пусть имеется однородная гибкая струна, один конец которой свободен, на другой ее конец действует внешняя сила и, кроме того, к каждой точке струны также приложена внешняя сила. Требуется, управляя указанными внешними силами, к заданному моменту времени привести струну в положение, как можно меньше отличающееся от заданного. Требуется реализовать оптимальное управление в задаче по функции, указанной в варианте индивидуального задания, соответствующим методом минимизации с различными способами выбора шага спуска. Сравнить способы выбора шага спуска по числу итераций с разными вариантами входных данных. Объяснить полученные результаты.

Контрольные вопросы/задания:

<p>Уметь: разрабатывать и исследовать алгоритмы численного решения некорректных экстремальных задач</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Построить неявную разностную схему для уравнения колебания струны. Провести аппроксимацию краевых условий. 2. Получить условие оптимальности в задаче оптимального управления процессом колебания струны. 3. Получить сопряженную краевую задачу. 4. Получить градиент функционала в задаче оптимального управления процессом колебания струны при стартовом управлении. 5. Написать итерационные формулы методов проекции градиента и условного градиента для задачи оптимального управления процессом колебания стержня 6. Пусть $U = \{u: \text{ } u \in R, \text{ } 0 \leq u < +\infty\}$. Рассмотреть задачи минимизации на множестве U функций $J(u) = u^2, J(u) = (1 + u)^{-1}, J(u) = 1, J(u) = u \text{ } (1 + u^2)^{-1}, J(u) = u \text{ } (1 + u^2)^{-1} + \alpha u, \text{ } \alpha = const > 0$. Выяснить, какие из этих задач корректны и какие некорректны в естественной метрике $\rho(u, v) = u - v$. 7. Будет ли корректной задача минимизации на множестве $U = L_2(0,1)$ функционала $J(u) = \int_0^1 u^2(t)dt$ в метрике $L_2(0,1)$? $C[0,1]$? 8. Исследовать на корректность заданную экстремальную задачу.
---	---

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 90

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется, если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется, если большинство вопросов раскрыто, выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется, если задание преимущественно выполнено

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

3 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

Методы минимизации: градиентный метод.
Оптимальное управление колебанием стержня. Сопряженная задача. Градиент.
Показать дифференцируемость заданного функционала.

Процедура проведения

Экзамен проводится в письменно-устной форме. На подготовку ответа студенту дается 60 минут. Кроме ответа на вопросы билета студент должен ответить на дополнительные вопросы.

1. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины

1. Компетенция/Индикатор: ИД-ЗПК-1 Демонстрирует знание терминологии, основных понятий и методов решения прикладных задач

Вопросы, задания

- 1.Оптимальное управление колебанием стержня. Сопряженная задача. Градиент
- 2.Оптимальное управление колебанием стержня. Постановка задачи. Приращение функционала
- 3.Оптимальное управление колебанием струны. Условие оптимальности. Методы решения
- 4.Оптимальное управление колебанием струны. Градиент
- 5.Оптимальное управление колебанием струны. Постановка задачи
- 6.Оптимальное управление процессом нагрева стержня. Сопряженная краевая задача
- 7.Оптимальное управление процессом нагрева стержня. Условие оптимальности. Методы решения
- 8.Оптимальное управление процессом нагрева стержня. Условие Липшица для градиента
- 9.Оптимальное управление процессом нагрева стержня. Градиент
- 10.Оптимальное управление процессом нагрева стержня. Постановка задачи
- 11.Правило множителей Лагранжа
- 12.Функционал Лагранжа. Седловая точка функционала Лагранжа. Необходимые и достаточные условия существования седловой точки
- 13.Необходимые и достаточные условия экстремума
- 14.Экстремум функционала. Экстремальные задачи
- 15.Сильно выпуклые функционалы. Критерии сильной выпуклости гладких функционалов
- 16.Выпуклые функционалы. Критерии выпуклости гладких функционалов
- 17.Дифференцируемые функционалы. Градиент
- 18.Математическое моделирование оптимального управления процессами, описываемыми системой первого порядка с частными производными. Постановка задачи. Сопряженная краевая задача. Градиент
- 19.Математическое моделирование оптимального управления процессами, описываемыми системой первого порядка с частными производными. Условия оптимальности. Методы решения

Материалы для проверки остаточных знаний

1. В задаче оптимального управления процессом нагрева стержня управлением является функция начального распределения температуры в стержне, тогда управление называется

Ответы:

1) распределенным, 2) стартовым, 3) граничным.

Верный ответ: 2

2. В задаче оптимального управления процессом нагрева стержня рассматривается функционал $J(u) = \int_0^0 0_0 0_0 (x(s, T, u) - y(s)) ds$, тогда задача оптимального управления называется задачей

Ответы:

1) с финальным наблюдением, 2) с распределенным наблюдением, 3) с минимальной энергией.

Верный ответ: 1

3. Укажите исходные данные, на которых строится теория оптимального управления.

Ответы:

1) управление, 2) состояние управляемой системы, 3) наблюдение, 4) целевой функционал, 5) необходимые и достаточные условия экстремума функционала, 6) численные методы минимизации функционала, 7) сопряженная задача

Верный ответ: 1, 2, 3, 4

2. Компетенция/Индикатор: ИД-5_{ПК-1} Применяет современные методы исследования математических моделей

Вопросы, задания

1. Написать неявную разностную схему для уравнения теплопроводности

2. Вычислить две итерации по методу проекции градиента для функции $J(u) = x + xy + y$ при $u \in \{x \in \text{brack}0,1\text{brack}, y \in \text{brack} - 1,0\text{brack}\}$, выбирая в качестве $u_0^0 = (1, -1)$

3. В задаче граничного управления процессом нагрева стержня рассмотреть множество допустимых управлений вида $p(t) \in L_2^2 \text{brack}0, T\text{brack}, \int_0^0 0_0 0_0 (p(t) - q(t)) \text{differential} Dt < R$, где число $R > 0$ и $q(t) \in L_2^2 \text{brack}0, T\text{brack}$ заданы. Описать метод проекции градиента

4. В задаче граничного управления процессом колебания струны рассмотреть множество допустимых управлений вида $p(t) \in L_2^2 \text{brack}0, T\text{brack}, \int_0^0 0_0 0_0 (p(t) - q(t)) \text{differential} Dt < R$, где число $R > 0$ и $q(t) \in L_2^2 \text{brack}0, T\text{brack}$ заданы. Описать метод условного градиента

Материалы для проверки остаточных знаний

1. Расчетная формула градиентного метода для минимизации функционала $J(u)$ имеет вид

Ответы:

1) $u_{k+1}^{k+1} = u_k^k - \alpha_k^k J(u_k^k)$, 2) $u_{k+1}^{k+1} = Pr_U^U (u_k^k - \alpha_k^k J(u_k^k))$, 3) $u_{k+1}^{k+1} = u_k^k + \alpha_k^k k_k (-u_k^k)$

Верный ответ: 1

2. При каком значении веса разностная схема с весами для уравнения теплопроводности становится симметричной?

Ответы:

1) 1, 2) $\frac{1}{2}$, 3) 0

Верный ответ: 2

3. Какие из квадратурных формул численного интегрирования имеют второй порядок точности?

Ответы:

1) левых прямоугольников, 2) правых прямоугольников, 3) центральных прямоугольников, 4) трапеций, 5) парабол (Симпсона)

Верный ответ: 3, 4

3. Компетенция/Индикатор: ИД-бпк-1 Разрабатывает и исследует алгоритмы численного решения прикладных задач

Вопросы, задания

1. Пусть $U = \{u: \text{ } u \in R, \text{ } 0 \leq u < +\infty\}$. Исследовать корректность задачи минимизации на множестве U функции $J(u) = ((1 + u))$ в естественной метрике $\rho(u, v) = |u - v|$.

2. Исследовать корректность задачи минимизации на множестве $U = L_2(0,1)$ функционала $J(u) = \int_0^1 u^2(t)dt$ в метрике $C[0,1]$

3. Построить слабый стабилизатор для задачи минимизации функций на выпуклом замкнутом множестве из $L_p^p(a, b)$, $1 < p < +\infty$.

4. Пусть $J(u)$ - выпуклый полунепрерывный снизу функционал на выпуклом замкнутом ограниченном множестве U из гильбертова пространства H , $\Omega(u) = ||u||$. Выяснить возможность применения метода стабилизации Тихонова для поиска Ω -нормального решения задачи минимизации $J(u)$ на U .

Материалы для проверки остаточных знаний

1. Пусть $U = \{u: \text{ } u \in R, \text{ } 0 \leq u < +\infty\}$. Будет ли корректна задача минимизации на множестве U функции $J(u) = u \text{ } (1 + u^2)^{-1}$ в естественной метрике $\rho(u, v) = |u - v|$?

Ответы:

1) да, 2) нет

Верный ответ: 2

2. Пусть $U = \{u: \text{ } u \in R, \text{ } 0 \leq u < +\infty\}$. Будет ли корректна задача минимизации на множестве U функции $J(u) = u \text{ } (1 + u^2)^{-1} + \alpha u$, $\alpha = \text{const} > 0$ в естественной метрике $\rho(u, v) = |u - v|$?

Ответы:

1) да, 2) нет

Верный ответ: 1

3. В методе стабилизации задачи минимизации функционала $J(u)$ используется функционал Тихонова $T_k^k k_k(u) = J(u) + \alpha_k^k \Omega(u)$, в котором числа α_k^k должны

Ответы:

1) стремиться к нулю, 2) быть положительными и стремиться к нулю, 3) быть отрицательными и стремиться к нулю

Верный ответ: 2

II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 90

Описание характеристики выполнения знания: Работа выполнена в рамках "продвинутого" уровня. Ответы даны верно, четко сформулированные особенности практических решений

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Работа выполнена в рамках "базового" уровня. Большинство ответов даны верно. В части материала есть незначительные недостатки

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Работа выполнена в рамках "порогового" уровня. Основная часть задания выполнена верно.

III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих