

**Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

Направление подготовки/специальность: 11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы

Наименование образовательной программы: Радиоэлектронные системы и комплексы

Уровень образования: высшее образование - специалитет

Форма обучения: Очная

**Оценочные материалы
по дисциплине
Численные методы**

**Москва
2024**

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАЗРАБОТАЛ:

Разработчик

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Замолодчиков В.Н.
	Идентификатор	R8c700dda-ZamolodchikVN-ded34e

В.Н.
Замолодчиков

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель
образовательной
программы

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Сизякова А.Ю.
	Идентификатор	R4eb30863-SiziakovaAY-83831ea7

А.Ю.
Сизякова

Заведующий
выпускающей кафедрой

	Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»	
	Сведения о владельце ЦЭП МЭИ	
	Владелец	Куликов Р.С.
	Идентификатор	R7ef0b374-KulikovRS-e851162c

Р.С. Куликов

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Оценочные материалы по дисциплине предназначены для оценки: достижения обучающимися запланированных результатов обучения по дисциплине, этапа формирования запланированных компетенций и уровня освоения дисциплины.

Оценочные материалы по дисциплине включают оценочные средства для проведения мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Формируемые у обучающегося компетенции:

1. ОПК-1 Способен представить адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов и методов естественных наук и математики

ИД-2 Применяет естественнонаучные знания, физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера

2. ОПК-7 Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности

ИД-1 Понимает принципы работы современных информационных технологий

3. ОПК-9 Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения

ИД-1 Знает алгоритмы расчетов, пригодные для практического применения

и включает:

для текущего контроля успеваемости:

Форма реализации: Защита задания

1. Лабораторная работа № 1 «Решение нелинейных уравнений» (Лабораторная работа)
2. Лабораторная работа № 2 «Решение СЛАУ итерационными методами» (Лабораторная работа)
3. Лабораторная работа № 3 «Приближение функций» (Лабораторная работа)
4. Лабораторная работа №4 «Численное решение задачи Коши» (Лабораторная работа)

Форма реализации: Компьютерное задание

1. Контрольная работа "Комплексный тест по курсу ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ" (Тестирование)

Форма реализации: Письменная работа

1. Расчетное задание № 1 «Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений» (Расчетно-графическая работа)
2. Расчетное задание № 2 «Аппроксимация функций многочленами методом наименьших квадратов» (Расчетно-графическая работа)
3. Расчетное задание № 3 «Численное интегрирование и численное решение задачи Коши» (Расчетно-графическая работа)

БРС дисциплины

3 семестр

Раздел дисциплины	Веса контрольных мероприятий, %								
	Индекс КМ:	КМ- 1	КМ- 2	КМ- 3	КМ- 4	КМ- 5	КМ- 6	КМ- 7	КМ- 8

	Срок КМ:	6	8	10	11	13	14	15	16
Введение в теорию погрешностей									
Введение в теорию погрешностей									+
Численные методы решения нелинейных уравнений. Численные методы поиска экстремума функции									
Численные методы решения нелинейных уравнений. Численные методы поиска экстремума функции	+								+
Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений									
Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений		+	+						+
Приближение функций. Метод наименьших квадратов. Интерполяция функций									
Приближение функций. Метод наименьших квадратов. Интерполяция функций					+	+			+
Численное дифференцирование. Численное интегрирование. Численное решение задачи Коши. Численное решение краевой задачи									
Численное дифференцирование. Численное интегрирование. Численное решение задачи Коши. Численное решение краевой задачи							+	+	+
Вес КМ:		10	10	10	10	10	10	15	25

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

I. Оценочные средства для оценки запланированных результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Индекс компетенции	Индикатор	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Контрольная точка
ОПК-1	ИД-2 _{ОПК-1} Применяет естественнонаучные знания, физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера	Уметь: правильно выбирать и применять численные методы, опираясь на анализ характера поставленной задачи оценивать точность (погрешность) полученного численного решения	Лабораторная работа №4 «Численное решение задачи Коши» (Лабораторная работа) Контрольная работа "Комплексный тест по курсу ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ" (Тестирование)
ОПК-7	ИД-1 _{ОПК-7} Понимает принципы работы современных информационных технологий	Уметь: выводить численные алгоритмы решения математических задач инженерной деятельности реализовывать расчетные алгоритмы численных методов, используя алгоритмические языки программирования или специальные средства математических пакетов прикладных программ	Лабораторная работа № 1 «Решение нелинейных уравнений» (Лабораторная работа) Расчетное задание № 2 «Аппроксимация функций многочленами методом наименьших квадратов» (Расчетно-графическая работа) Лабораторная работа № 3 «Приближение функций» (Лабораторная работа) Контрольная работа "Комплексный тест по курсу ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ" (Тестирование)
ОПК-9	ИД-1 _{ОПК-9} Знает алгоритмы расчетов,	Знать: математические методы	Лабораторная работа № 1 «Решение нелинейных уравнений» (Лабораторная работа)

	пригодны для практического применения	численного решения систем линейных уравнений математические методы численного решения нелинейных уравнений математические методы численного дифференцирования и интегрирования	Расчетное задание № 1 «Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений» (Расчетно-графическая работа) Лабораторная работа № 2 «Решение СЛАУ итерационными методами» (Лабораторная работа) Расчетное задание № 3 «Численное интегрирование и численное решение задачи Коши» (Расчетно-графическая работа) Контрольная работа "Комплексный тест по курсу ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ" (Тестирование)
--	--	---	---

II. Содержание оценочных средств. Шкала и критерии оценивания

КМ-1. Лабораторная работа № 1 «Решение нелинейных уравнений»

Формы реализации: Защита задания

Тип контрольного мероприятия: Лабораторная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 10

Процедура проведения контрольного мероприятия: перед выполнением лабораторной работы проводится опрос по контрольным вопросам после выполнения лабораторной работы студент готовит сообщение по изученной теме с обоснованием тезисов сообщения результатами, полученными при выполнении лабораторной работы особое внимание уделяется связи вопросов теории с практическими результатами и обоснованию выводов по работе

Краткое содержание задания:

Задача 1. Варианты заданий представлены в таблице 1. Даны два уравнения $f(x)=0$ и $g(x)=0$. Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$ все корни уравнений, содержащиеся на отрезке $[a, b]$. Для решения задачи использовать метод бисекции. Найти корни с помощью встроенной функции **root** пакета MATCAD и сравнить полученные с помощью метода бисекции результаты.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

1. Найти аналитическое решение уравнения $f(x)=0$.
2. Используя пакет MATCAD, локализовать корни $f(x)=0$ графически.
3. Используя программу **bisec** (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А), найти корни уравнения $f(x)=0$ с точностью ε с помощью метода бисекции.
4. Используя встроенную функцию **root** пакета MATCAD, найти корни уравнения $f(x)=0$ с точностью ε (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А).
5. Аналогично п. 1-4 попытаться найти корни уравнения $g(x)=0$. Объяснить полученные результаты.

Задача 2. Варианты заданий представлены в таблице 2. Требуется найти ближайший к точке $x=0$ корень уравнения $f(x)=0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$ используя метод Ньютона. Фрагмент решения задачи представлен в ПРИЛОЖЕНИИ Б.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

1. Используя пакет MATCAD, построить график функции $f(x)$, выбрать начальное приближение x_0 для метода Ньютона.
2. Используя программу **Newton** (см. ПРИЛОЖЕНИЕ Б), найти корень уравнения $f(x)=0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$.
3. Сравнить результат со встроенной в MATCAD функцией **root**.
4. Если корень кратный, использовать модификацию метода Ньютона (программа **Newton_mod**) для случая кратного корня (см. ПРИЛОЖЕНИЕ В). По минимуму числа итераций при значениях $m=1, 2, 3, 4, 5$ определить кратность корня.
5. Аналогично п. 4, использовать модификацию метода Ньютона (программа **Newton_mod**, ПРИЛОЖЕНИЕ В), и найти корень функции $g(x)$ из задачи №1. (начальное приближение для модифицированного метода Ньютона выбирается по графику $g(x)$). По минимуму числа итераций при значениях $m=1, 2, 3, 4, 5$ определить кратность корня.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: математические методы численного решения нелинейных уравнений	1. Что понимаем под термином “корень уравнения”? 2. Какой метод Вы использовали для локализации корней заданного уравнения? 3. Какой критерий окончания процедуры вычисления корня нелинейного уравнения Вы использовали?
Уметь: реализовывать расчетные алгоритмы численных методов, используя алгоритмические языки программирования или специальные средства математических пакетов прикладных программ	1. Поясните метод бисекции, используемый для поиска корня нелинейного уравнения на интервале локализации 2. Запишите итерационную формулу для поиска корня уравнения по методу Ньютона для заданного нелинейного уравнения

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 60

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется если большинство вопросов раскрыто. выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется если задание преимущественно выполнено

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "неудовлетворительно" выставляется если задание выполнено неверно или преимущественно не выполнено

КМ-2. Расчетное задание № 1 «Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений»

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Расчетно-графическая работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 10

Процедура проведения контрольного мероприятия: Студент получает индивидуальный вариант, решение в письменном виде сдает преподавателю для проверки

Краткое содержание задания:

Задача 1 Вычислить нормы $\ \cdot \ _1$, $\ \cdot \ _2$ и $\ \cdot \ _\infty$ матрицы A . Вычислить число обусловленности матрицы по формуле $\text{cond}(A) = \ A\ _\infty \cdot \ A^{-1}\ _\infty$
Задача 2 Решить систему линейных уравнений $Ax = b$ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу (схема частичного выбора). Сравнить результат с функцией <code>lsolve</code> пакета <code>MATNCAD</code> .
Задача 3 Решить систему линейных уравнений $Ax = d$ методом прогонки. Сравнить результат с функцией <code>lsolve</code> пакета <code>MATNCAD</code>

Контрольные вопросы/задания:

Знать: математические методы численного решения систем линейных уравнений	1. Запишите алгоритм первого шага прямого хода метода Гаусса для решения системы линейных уравнений $Ax=b$ 2. Приведите пример матрицы, для которой применяют метод прогонки при численном решении системы линейных уравнений $Ax=b$
---	---

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 60

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется если большинство вопросов раскрыто. выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется если задание преимущественно выполнено

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "неудовлетворительно" выставляется если задание выполнено неверно или преимущественно не выполнено

КМ-3. Лабораторная работа № 2 «Решение СЛАУ итерационными методами»

Формы реализации: Защита задания

Тип контрольного мероприятия: Лабораторная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 10

Процедура проведения контрольного мероприятия: перед выполнением лабораторной работы проводится опрос по контрольным вопросам после выполнения лабораторной работы студент готовит сообщение по изученной теме с обоснованием тезисов сообщения результатами, полученными при выполнении лабораторной работы особое внимание уделяется связи вопросов теории с практическими результатами и обоснованию выводов по работе

Краткое содержание задания:

Задача 1.

Дана система уравнений $Ax=b$. Найти решение системы с помощью метода Гаусса. Выполнить 10 итераций по методу простой итерации (методу Якоби). Принимая решение, полученное с помощью метода Гаусса, за точное, найти величину абсолютной погрешности итерационного решения. Варианты заданий даны в таблице 1.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

1. Задать матрицу A и вектор правой части b по приведенной в таблице 1 формуле. Используя встроенную функцию **lsolve** пакета MATHECAD, найти решение системы $Ax=b$ методом Гаусса.
2. Преобразовать систему $Ax=b$ к виду, удобному для итераций: $x = Bx + c$. Проверить выполнение достаточного условия сходимости итерационных методов $\|B\|_{\infty} < 1$.
3. Используя функцию **simple_iter** (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А), выполнить 10 итераций по методу Якоби. Взяв любое начальное приближение. Принимая решение, полученное в п.1, за точное, найти величину абсолютной погрешности итерационного решения. (Использовать норму $\|x_{\text{Гauss}} - x_{\text{Якоби}}^{(10)}\|_{\infty}$).
4. Выполнить п.3 еще раз для другого начального приближения, близкого к решению по методу Гаусса. Сравнить абсолютные погрешности.

Задача 2.

Дана та же СЛАУ, что и в задаче 1. Найти решение СЛАУ по методу Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, взяв любое начальное приближение. Предусмотреть подсчет количества итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности ε .

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Использовать программу для решения задачи 1 или задать заново матрицу A , вектор b .
2. Используя матрицу B , найденную при решении задачи 1, сформировать нижнюю треугольную матрицу B_1 и верхнюю треугольную матрицу B_2 . Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода Зейделя: $\|B_1\|_{\infty} + \|B_2\|_{\infty} < 1$. Вектор столбец c также использовать из задачи 1.
3. Используя функцию **zeid** (см. ПРИЛОЖЕНИЕ Б) найти решение СЛАУ с заданной точностью.
4. Повторить п.3 для другого начального приближения, близкого к решению по методу Гаусса. Сравнить количество итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: математические методы численного решения систем линейных уравнений	1. Каков критерий окончания решения системы линейных алгебраических уравнений методом простой итерации 2. Поясните отличие алгоритма метода Зейделя от метода Якоби для решения системы линейных алгебраических уравнений
---	--

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 60

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется если большинство вопросов раскрыто. выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется если задание преимущественно выполнено

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "неудовлетворительно" выставляется если задание выполнено неверно или преимущественно не выполнено

КМ-4. Расчетное задание № 2 «Аппроксимация функций многочленами методом наименьших квадратов»

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Расчетно-графическая работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 10

Процедура проведения контрольного мероприятия: Студент получает индивидуальный вариант, решение в письменном виде сдает преподавателю для проверки

Краткое содержание задания:

Функция задана таблицей своих значений. Применяя метод наименьших квадратов, приблизить функцию многочленами 1-й и 2-й степеней. Для каждого приближения определить величину среднеквадратичной погрешности. Построить точечный график функции и графики многочленов.

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: выводить численные алгоритмы решения математических задач инженерной деятельности	1.Запишите в общем виде линейную аппроксимирующую функцию 2.Запишите пример базисных функций, используемых при записи линейной аппроксимирующей функции 3.Запишите выражение для условия минимизации среднеквадратичного отклонения значений аппроксимирующего многочлена от табличных значений исходной зависимости
--	--

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 60

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется если большинство вопросов раскрыто. выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется если задание преимущественно выполнено

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "неудовлетворительно" выставляется если задание выполнено неверно или преимущественно не выполнено

КМ-5. Лабораторная работа № 3 «Приближение функций»

Формы реализации: Защита задания

Тип контрольного мероприятия: Лабораторная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 10

Процедура проведения контрольного мероприятия: перед выполнением лабораторной работы проводится опрос по контрольным вопросам после выполнения лабораторной работы студент готовит сообщение по изученной теме с обоснованием тезисов сообщения результатами, полученными при выполнении лабораторной работы особое внимание уделяется связи вопросов теории с практическими результатами и обоснованию выводов по работе

Краткое содержание задания:

Задача 1
Функция $y=f(x)$ задана таблицей значений $y_0, y_1, \dots, y_n$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$. Используя метод наименьших квадратов (МНК), найти многочлен $P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ наилучшего среднеквадратичного приближения оптимальной степени $m=m^*$. За оптимальное значение m^* принять ту степень многочлена, начиная с которой величина

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n-m} \sum_{k=0}^n (P_m(x_k) - y_k)^2}$$

стабилизируется или начинает возрастать.

Исходные данные для задачи 1 представлены в таблице 1.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать векторы x и y исходных данных.
2. Используя функцию `mink` (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А), найти многочлены P_m , $m=0,1,\dots,n-1$ по методу наименьших квадратов. Вычислить соответствующие им значения σ_m .
3. Построить график зависимости σ_m от m , на основании которого выбрать оптимальную степень m^* многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения.
4. На одном чертеже построить графики многочленов P_m , $m=0,1,\dots,m^*$, и точечный график исходной функции.

Задача 2
Известны значения функции $y_i = f(x_i)$ ($i=0,1,\dots,n$) в $n+1$ точке x_i ($i=0,1,\dots,n$). Также известен аналитический вид функции. Интерполировать функцию на отрезке $[x_0, x_n]$ по формулам:

- 2.1) интерполяционной формулой Лагранжа;
- 2.2) интерполяционной формулой Ньютона.

Варианты заданий представлены в таблице 2.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать векторы x и y исходных данных.
2. Запрограммировать расчетную формулу полинома Лагранжа (см. ПРИЛОЖЕНИЕ Б).
3. Вычислить значения полинома Лагранжа на интервале $[x_0, x_n]$ с более мелким шагом, чем исходных данных.
4. На одном чертеже построить точечный график заданной функции, ее аналитический график и график интерполяционного полинома Лагранжа.
5. Составить программу расчета конечных разностей (см. ПРИЛОЖЕНИЕ Б).
6. Запрограммировать расчетную формулу многочлена Ньютона с конечными разностями.
7. На одном чертеже построить точечный график заданной функции, ее аналитический график и график интерполяционного многочлена Ньютона.

7

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: выводить численные алгоритмы решения математических задач инженерной деятельности	1. Запишите критерий выбора коэффициентов полиномиальной модели при аппроксимации функции по методу наименьших квадратов 2. Перечислите критерии выбора параметров модели (коэффициентов искомого полинома) 3. Запишите интерполяционный многочлен Лагранжа в общем виде
--	--

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 60

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется если большинство вопросов раскрыто. выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется если задание преимущественно выполнено

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "неудовлетворительно" выставляется если задание выполнено неверно или преимущественно не выполнено

КМ-6. Расчетное задание № 3 «Численное интегрирование и численное решение задача Коши»

Формы реализации: Письменная работа

Тип контрольного мероприятия: Расчетно-графическая работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 10

Процедура проведения контрольного мероприятия: Студент получает индивидуальный вариант, решение в письменном виде сдает преподавателю для проверки

Краткое содержание задания:

Вычислить приближенное значение интеграла, используя квадратурные формулы:

- а) центральных прямоугольников с шагом; дать априорную оценку погрешности;
- б) трапеций с шагами и; оценить погрешность последнего результата по формуле Рунге и уточнить последний результат по Рунге;
- в) Симпсона с шагом.

УКАЗАНИЕ. Промежуточные результаты вычислять с 6 значащими цифрами.

Аргументы тригонометрических функций вычислять в радианах

Численно решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1 порядка

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

на отрезке $[t_0, T]$ с шагом $h = 0.2$:

- а) методом Эйлера,
- б) методом Рунге-Кутты 2 порядка с оценкой погрешности по правилу Рунге.

Найти точное решение задачи. Построить на одном чертеже графы точного и приближенного решений, полученных методами Эйлера и Рунге-Кутты с шагом $h = 0.2$.

Контрольные вопросы/задания:

Знать: математические методы численного дифференцирования и интегрирования	1. Дайте определение конечной разности первого порядка 2. Дайте определение конечной разности второго порядка 3. Назовите формулы численного интегрирования, имеющие второй порядок точности 4. Запишите правило Рунге для апостериорной оценки погрешности формул численного интегрирования
--	--

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 60

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется если большинство вопросов раскрыто. выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется если задание преимущественно выполнено

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "неудовлетворительно" выставляется если задание выполнено неверно или преимущественно не выполнено

КМ-7. Лабораторная работа №4 «Численное решение задачи Коши»

Формы реализации: Защита задания

Тип контрольного мероприятия: Лабораторная работа

Вес контрольного мероприятия в БРС: 15

Процедура проведения контрольного мероприятия: перед выполнением лабораторной работы проводится опрос по контрольным вопросам после выполнения лабораторной работы студент готовит сообщение по изученной теме с обоснованием тезисов сообщения результатами, полученными при выполнении лабораторной работы особое внимание уделяется связи вопросов теории с практическими результатами и обоснованию выводов по работе

Краткое содержание задания:

Задача 1. Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1 порядка

$$y' = f(t, y), \quad t \in [t_0, T], \quad (6)$$

$$y(t_0) = y_0$$

с заданным шагом $h=0.2$ и вычислять погрешность приближенного решения

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Сформулировать задачу. Для этого из таблицы 1 взять функцию $f(t, y)$ и начальные условия y_0 . Вычислить функцию $y(t)$ по формуле $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y) dt$.

2. Вычислить значение $y_0 = y(t_0)$ в начальной точке t_0 . Вычислить значение $T = t_0 + 1$.

3. Записать задачу Коши в виде

$$y' = f(t, y), \quad t \in [t_0, T], \quad (7)$$

$$y(t_0) = y_0$$

где $f(t, y)$ – правая часть уравнения (6) с заданной функцией $f(t, y)$ в формуле (6) расписать не нужно.

4. Используя функцию `ode45` (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А), найти приближенное решение задачи Коши с шагом $h=0.2$ по методу Рунге-Кутты 4-го порядка точности (или методом Эйлера по формуле $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$), где $y_i = y(t_i)$ и $y_0 = y(t_0)$ – значения точного и приближенного решений в узлах сетки $t_i, i = 0, 1, \dots, N$.

5. Используя встроенную функцию `ode45` пакета MATLAB, найти приближенное решение задачи Коши с шагом $h=0.2$ по методу Рунге-Кутты 4-го порядка точности (или методом Эйлера по формуле $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$), где $y_i = y(t_i)$ и $y_0 = y(t_0)$ – значения точного и приближенного решений в узлах сетки $t_i, i = 0, 1, \dots, N$.

6. Построить таблицу значений точного и приближенного решений. На одном чертеже построить графики точного и приближенных решений.

Задача 2. Найти приближенное решение задачи Коши (8) для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1 порядка явным методом Эйлера с

точностью $\varepsilon = 0.001$, шагом $h = 0.1$.

$$y' = f(t, y), \quad t \in [t_0, T], \quad (8)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Погрешность решения оценивать по правилу Рунге (формула 2). Функцию $f(t, y)$ для каждого индивидуального варианта представить в таблице 2

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Вычислить $T = t_0 + 1$, рассчитать число узлов сетки N .

2. Используя функцию `ode45` (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А), найти приближенное решение задачи (8) с шагом $h=0.1$ по явному методу Эйлера.

3. Применить шаг h к явным. Найти новое значение узла сетки. Найти решение задачи явным методом Эйлера с новым шагом. Сравнить погрешность нового решения по правилу Рунге.

4. Повторять п. 3 до тех пор, пока оценка погрешности по правилу Рунге не станет меньше заданной точности $\varepsilon = 0.001$.

5. Построить график решения, найденного с заданной точностью.

Примечание. В таблице оценки погрешности для каждого узла сетки

использованы значения y_i для оценки погрешности по правилу Рунге, т.е.

$$\Delta = \max_{i=1, \dots, N} |y_i - y_i^*| = \max_{i=1, \dots, N} \left| \frac{h^4 (t_i - t_0)^4}{24} f^{(4)}(t_i) \right|$$

6

Контрольные вопросы/задания:

Уметь: правильно выбирать и применять численные методы, опираясь на анализ характера поставленной задачи

1. Запишите последовательность действий для решения задачи Коши численными методами
2. Запишите расчетную формулу явного метода Эйлера, используемого для численного решения задачи Коши
3. Запишите расчетную формулу явного метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности, используемого для численного решения задачи Коши

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 60

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется если большинство вопросов раскрыто. выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется если задание преимущественно выполнено

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "неудовлетворительно" выставляется если задание выполнено неверно или преимущественно не выполнено

КМ-8. Контрольная работа "Комплексный тест по курсу ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ"

Формы реализации: Компьютерное задание

Тип контрольного мероприятия: Тестирование

Вес контрольного мероприятия в БРС: 25

Процедура проведения контрольного мероприятия: Проводится в виде тестирования с использованием СДО "Прометей" (при проведении экзамена в дистанционном формате с использованием ДОТ одновременно используется платформа Webex или аналогичная платформа, утвержденная в НИУ МЭИ, с целью прокторинга и видеофиксации). При выполнении теста можно пользоваться калькулятором, ручкой, карандашом и листом бумаги для черновиков. На выполнение теста отведено 60 минут. Тест содержит 9 заданий, максимальная сумма баллов - 100. Оценка за тест выставляется на основе результата выполнения экзаменационного теста в СДО Прометей. Для получения оценки 3(удовлетворительно) необходимо набрать от 50 до 69 баллов, для получения оценки 4(хорошо) необходимо набрать от 70 до 89 баллов, для получения оценки 5(отлично) необходимо набрать от 90 до 100 баллов

Краткое содержание задания:

Вопрос №1

Укажите количество значащих цифр в записи приближенного числа 0,086000.

Варианты ответов: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Вопрос №2

Укажите условие сходимости метода простой итерации для решения нелинейного уравнения. Исходное уравнение приведено к виду, удобному для итерации

$$x = \varphi(x)$$

Варианты ответов:

$$|\varphi'(x)| > 1 \quad \varphi'(x) > 0$$

$$\varphi'(x) < 0 \quad |\varphi'(x)| < 1$$

Вопрос №3

Укажите расчетную формулу метода секущих для решения нелинейных уравнений

Варианты ответов:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}, \quad n \geq 0.$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(0)})}, \quad n \geq 0.$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{c - x^{(n)}}{f(c) - f(x^{(n)})} f(x^{(n)})$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n-1)} - x^{(n)}}{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})} f(x^{(n)})$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f(x^{(n)} + f(x^{(n)})) - f(x^{(n)})}$$

Вопрос №4

Укажите итерационные методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (методы последовательных приближений).

Варианты ответов:

Метод Гаусса

Метод последовательной верхней релаксации

Метод Холецкого

Метод Зейделя

Метод Якоби

Метод прогонки

Вопрос №5

Укажите формулы численного дифференцирования, которые имеют 2-й порядок точности.

Варианты ответов:

Формула левой разностной производной.

Формула правой разностной производной.

Формула центральной разностной производной.

Формула второй разностной производной.

Формула Симпсона.

Вопрос №6

Укажите название приведенной ниже формулы численного интегрирования

$$I = h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

Варианты ответов:

Формула левых прямоугольников Формула правых прямоугольников

Формула центральных прямоугольников

Формула трапеций

Формула Симпсона

Вопрос №7

Укажите название метода численного решения задачи Коши, алгоритм которого приведен ниже

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n),$$

$$y_0 = y(t_0)$$

Варианты ответов:

Метод Эйлера

Метод Эйлера-Коши

Усовершенствованный метод Эйлера

Метод Рунге - Кутты 4-го порядка точности

Неявный метод Эйлера 2-го порядка точности

Вопрос №8

Вычислите указанную норму матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 1,483 & -2,108 & -1,602 \\ 2,282 & 1,283 & -0,367 \\ -2,882 & -2,073 & 2,764 \end{bmatrix}, \quad \|A\|_1 = ?$$

Варианты ответов:

2,764
2,882
6,037
6,647
7,719

Вопрос №9

Дан многочлен третьей степени. Найти действительный корень многочлена с точностью 0,01 методом Ньютона. Начальное приближение $x = -2,7$. Исходные данные: $b = -1$; $c = 30$. Результат записать с указанием только верных цифр в десятичном формате с запятой в качестве разделителя

$$P(x) = x^3 + bx^2 + c$$

Контрольные вопросы/задания:

Знать: математические методы численного дифференцирования и интегрирования	1. Запишите задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка, разрешенного относительно производной
Знать: математические методы численного решения нелинейных уравнений	1. Запишите необходимое условие экстремума функции нескольких переменных
Знать: математические методы численного решения систем линейных уравнений	1. Приведите пример линейно независимой системы функций в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 2. Каков критерий окончания решения системы линейных алгебраических уравнений методом простой итерации
Уметь: оценивать точность (погрешность) полученного численного решения	1. Запишите формулы вычисления абсолютной и относительной погрешности суммы или разности 2. Задано число $\pi = 3,141592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 88\dots$ Выполните округление усечением до 4 значащих цифр 3. Перечислите отличия абсолютной и относительной погрешностей. Приведите примеры погрешностей
Уметь: правильно выбирать и применять численные методы, опираясь на анализ характера поставленной задачи	1. Запишите расчетную формулу явного метода Эйлера, используемого для численного решения задачи Коши 2. Запишите расчетную формулу явного метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности, используемого для численного решения задачи Коши
Уметь: выводить численные алгоритмы решения математических задач инженерной деятельности	1. Какова связь между степенью многочлена Лагранжа и числа точек - узлов интерполяции 2. Приведите определение для интерполяционного многочлена в форме Ньютона

Описание шкалы оценивания:

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 90

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "отлично" выставляется если задание выполнено в полном объеме или выполнено преимущественно верно

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 70

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "хорошо" выставляется если большинство вопросов раскрыто. выбрано верное направление для решения задач

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "удовлетворительно" выставляется если задание преимущественно выполнено

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Оценка "неудовлетворительно" выставляется если задание выполнено неверно или преимущественно не выполнено

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

3 семестр

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Пример билета

Вопрос №1

Укажите количество значащих цифр в записи приближенного числа 0,086000

Варианты ответов: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Вопрос №2

Укажите условие сходимости метода простой итерации для решения нелинейного уравнения. Исходное уравнение приведено к виду, удобному для итерации

$$x = \varphi(x)$$

Варианты ответов:

$$|\varphi'(x)| > 1 \quad \varphi'(x) > 0$$

$$\varphi'(x) < 0 \quad |\varphi'(x)| < 1$$

Вопрос №3

Укажите расчетную формулу метода секущих для решения нелинейных уравнений

Варианты ответов:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}, \quad n \geq 0.$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(0)})}, \quad n \geq 0.$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{c - x^{(n)}}{f(c) - f(x^{(n)})} f(x^{(n)})$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n-1)} - x^{(n)}}{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})} f(x^{(n)})$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f(x^{(n)}) + f(x^{(n)})} f(x^{(n)})$$

Вопрос №4

Укажите итерационные методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (методы последовательных приближений)

Варианты ответов:

- Метод Гаусса
- Метод последовательной верхней релаксации
- Метод Холецкого
- Метод Зейделя
- Метод Якоби
- Метод прогонки

Вопрос №5

Укажите формулы численного дифференцирования, которые имеют 2-й порядок точности

Варианты ответов:

- Формула левой разностной производной.
- Формула правой разностной производной.
- Формула центральной разностной производной.
- Формула второй разностной производной.
- Формула Симпсона.

Вопрос №6

Укажите название приведенной ниже формулы численного интегрирования

$$I = h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

Варианты ответов:

Формула левых прямоугольников.

Формула правых прямоугольников

Формула центральных прямоугольников

Формула трапеций

Формула Симпсона

Вопрос №7

Укажите название метода численного решения задачи Коши, алгоритм которого приведен ниже

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n),$$

$$y_0 = y(t_0)$$

Варианты ответов:

Метод Эйлера

Метод Эйлера-Коши

Усовершенствованный метод Эйлера

Метод Рунге - Кутты 4-го порядка точности

Неявный метод Эйлера 2-го порядка точности

Вопрос №8

Вычислите указанную норму матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 1,483 & -2,108 & -1,602 \\ 2,282 & 1,283 & -0,367 \\ -2,882 & -2,073 & 2,764 \end{bmatrix}, \quad \|A\|_1 = ?$$

Варианты ответов:

2,764

2,882

6,037

6,647

7,719

Вопрос №9

Дан многочлен третьей степени. Найти действительный корень многочлена с точностью 0,01 методом Ньютона. Начальное приближение $x = -2,7$. Исходные данные: $b = -1$; $c = 30$. Результат записать с указанием только верных цифр в десятичном формате с запятой в качестве разделителя

$$P(x) = x^3 + bx^2 + c$$

Процедура проведения

Экзамен проводится в виде тестирования с использованием СДО "Прометей" (при проведении экзамена в дистанционном формате с использованием ДОТ одновременно используется платформа Webex или аналогичная платформа, утвержденная в НИУ МЭИ, с целью прокторинга и видеофиксации). При выполнении теста можно пользоваться калькулятором, ручкой, карандашом и листом бумаги для черновиков. На выполнение теста отведено 60 минут. Тест содержит 9 заданий, максимальная сумма баллов - 100. Оценка за экзамен (экзаменационная составляющая) выставляется на основе результата выполнения экзаменационного теста в СДО Прометей. Для получения оценки 3(удовлетворительно) необходимо набрать от 50 до 79 баллов, для получения оценки 4(хорошо) необходимо набрать от 80 до 94 баллов, для получения оценки 5(отлично) необходимо набрать от 95 до 100 баллов

1. Перечень компетенций/индикаторов и контрольных вопросов проверки результатов освоения дисциплины

1. Компетенция/Индикатор: ИД-2_{ОПК-1} Применяет естественнонаучные знания, физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера

Вопросы, задания

1. Каково количество значащих цифр в записи приближенного числа 0,098700
2. Запишите расчетную формулу метода секущих для решения нелинейных уравнений
3. Укажите название приведенной ниже формулы численного интегрирования

$$I = h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

Материалы для проверки остаточных знаний

1. Укажите правильное выражение для верхней границы абсолютной погрешности

Ответы:

а)

$$\overline{\Delta}(a^*) = |a - a^*|$$

б)

$$\overline{\Delta}(a^*) \geq |a - a^*|$$

в)

$$\overline{\Delta}(a^*) = \frac{|a - a^*|}{|a|}$$

г)

$$\overline{\Delta}(a^*) \geq \frac{|a - a^*|}{|a|}$$

Верный ответ: б)

2. Функция задана таблицей значений в 5 точках. Укажите порядок полинома Лагранжа, которым можно аппроксимировать заданную функцию

Ответы:

- а) 1
- б) 2
- в) 3
- г) 4
- д) 5
- е) 6

Верный ответ: г)

3. Укажите название приведенной ниже формулы численного интегрирования

$$I = \frac{h}{6} \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

Ответы:

- а) Формула левых прямоугольников
- б) Формула правых прямоугольников
- в) Формула центральных прямоугольников
- г) Формула трапеций
- д) Формула Симпсона

Верный ответ: д) Формула Симпсона

2. Компетенция/Индикатор: ИД-1_{ОПК-7} Понимает принципы работы современных информационных технологий

Вопросы, задания

1. Укажите название метода численного решения задачи Коши, алгоритм которого приведен ниже

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n),$$

$$y_0 = y(t_0)$$

2. Вычислите указанную норму матрицы А

$$A = \begin{bmatrix} 1,483 & -2,108 & -1,602 \\ 2,282 & 1,283 & -0,367 \\ -2,882 & -2,073 & 2,764 \end{bmatrix}, \quad \|A\|_1 = ?$$

3. Дан многочлен третьей степени. Найти действительный корень многочлена с точностью 0,01 методом Ньютона. Начальное приближение $x = -2,7$. Исходные данные: $b = -1$; $c = 3$

$$P(x) = x^3 + bx^2 + c$$

Материалы для проверки остаточных знаний

1. Укажите количество значащих цифр в записи приближенного числа 0,086000

Ответы:

- а) 2
- б) 3
- в) 4
- г) 5
- д) 6
- е) 7

Верный ответ: г)

2. Функция задана таблицей значений в 5 точках. Укажите порядок полиномов, которыми можно аппроксимировать (сгладить) заданную функцию, используя метод наименьших квадратов

Ответы:

- а) 1
- б) 2
- в) 3
- г) 4
- д) 5
- е) 6

Верный ответ: а), б), в)

3. Численно решить задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка на отрезке $[t_0, T]$ с шагом $h=0,2$ методом Эйлера. Ответ записать с 3-я верными цифрами в десятичном формате с запятой в качестве разделителя

$$y' = f(t, y) = \frac{y}{t} + t^2, \quad y(t_0) = 0, \quad t_0 = 1, \quad T = 2.$$

Ответы:

- а) 1,00
- б) 2,45
- в) 2,50
- г) 3,0

Верный ответ: б)

3. Компетенция/Индикатор: ИД-1_{ОПК-9} Знает алгоритмы расчетов, пригодные для практического применения

Вопросы, задания

1. Укажите условие сходимости метода простой итерации для решения нелинейного уравнения
2. Перечислите итерационные методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (методы последовательных приближений)

3. Перечислите формулы численного дифференцирования, которые имеют 2-й порядок точности

Материалы для проверки остаточных знаний

1. Укажите итерационные методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (методы последовательных приближений)

Ответы:

- а) Метод Гаусса
- б) Метод последовательной верхней релаксации
- в) Метод Холецкого
- г) Метод Зейделя
- д) Метод Якоби
- е) Метод прогонки

Верный ответ: б), г), д)

2. Укажите формулы численного дифференцирования, которые имеют 2-й порядок точности

Ответы:

- а) Формула левой разностной производной
- б) Формула правой разностной производной
- в) Формула центральной разностной производной
- г) Формула второй разностной производной
- д) Формула Симпсона

Верный ответ: в), г)

3. Укажите формулы численного интегрирования, которые имеют 2-й порядок точности

Ответы:

- а) Формула левых прямоугольников
- б) Формула правых прямоугольников
- в) Формула центральных прямоугольников
- г) Формула трапеций
- д) Формула Симпсона
- е) Ни одна из перечисленных формул

Верный ответ: в), г)

4. Укажите численные методы прямого поиска минимума функции одного аргумента

Ответы:

- а) Оптимальный пассивный поиск
- б) Метод покоординатного спуска
- в) Метод деления отрезка пополам
- г) Метод Фибоначи
- д) Метод деформируемого многогранника
- е) Метод золотого сечения
- ж) Метод бисекции
- з) Метод Ньютона

Верный ответ: а), в), г), е)

II. Описание шкалы оценивания

Оценка: 5

Нижний порог выполнения задания в процентах: 95

Описание характеристики выполнения знания: Работа выполнена в рамках "продвинутого" уровня. Ответы даны верно, четко сформулированные особенности практических решений

Оценка: 4

Нижний порог выполнения задания в процентах: 80

Описание характеристики выполнения знания: Работа выполнена в рамках "базового" уровня. Большинство ответов даны верно. В части материала есть незначительные недостатки

Оценка: 3

Нижний порог выполнения задания в процентах: 50

Описание характеристики выполнения знания: Работа выполнена в рамках "порогового" уровня. Основная часть задания выполнена верно. на вопросы углубленного уровня

Оценка: 2

Описание характеристики выполнения знания: Работа не выполнена или выполнена преимущественно неправильно

III. Правила выставления итоговой оценки по курсу

Оценка определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ» на основании семестровой и экзаменационной составляющих