

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

---

Направление подготовки/специальность: 15.03.03 Прикладная механика

Наименование образовательной программы: Динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры

Уровень образования: высшее образование - бакалавриат

Форма обучения: Очная

**Рабочая программа дисциплины**  
**ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

<b>Блок:</b>	<b>Блок 1 «Дисциплины (модули)»</b>
<b>Часть образовательной программы:</b>	<b>Обязательная</b>
<b>№ дисциплины по учебному плану:</b>	<b>Б1.О.26</b>
<b>Трудоемкость в зачетных единицах:</b>	<b>4 семестр - 2;</b>
<b>Часов (всего) по учебному плану:</b>	<b>72 часа</b>
<b>Лекции</b>	<b>4 семестр - 16 часов;</b>
<b>Практические занятия</b>	<b>4 семестр - 16 часов;</b>
<b>Лабораторные работы</b>	<b>не предусмотрено учебным планом</b>
<b>Консультации</b>	<b>проводится в рамках часов аудиторных занятий</b>
<b>Самостоятельная работа</b>	<b>4 семестр - 39,7 часа;</b>
<b>в том числе на КП/КР</b>	<b>не предусмотрено учебным планом</b>
<b>Иная контактная работа</b>	<b>проводится в рамках часов аудиторных занятий</b>
<b>включая:</b>	
<b>Контрольная работа</b>	
<b>Промежуточная аттестация:</b>	
<b>Зачет с оценкой</b>	<b>4 семестр - 0,3 часа;</b>

**Москва 2026**

**ПРОГРАММУ СОСТАВИЛ:**

Преподаватель

	<b>Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»</b>	
	<b>Сведения о владельце ЦЭП МЭИ</b>	
	Владелец	Капицына Т.В.
	Идентификатор	R2b1e4b7e-KapitsynaTV-1a69b3e3

Т.В. Капицына

**СОГЛАСОВАНО:**

Руководитель  
образовательной программы

	<b>Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»</b>	
	<b>Сведения о владельце ЦЭП МЭИ</b>	
	Владелец	Цой В.Э.
	Идентификатор	Rd9d3a9dd-TsoyVE-b05eb4b4

В.Э. Цой

Заведующий выпускающей  
кафедрой

	<b>Подписано электронной подписью ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»</b>	
	<b>Сведения о владельце ЦЭП МЭИ</b>	
	Владелец	Меркурьев И.В.
	Идентификатор	Rd52c763c-MerkuryevIV-1e4a883c

И.В. Меркурьев

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

**Цель освоения дисциплины:** Основы вариационного исчисления для бакалавров является закладка математического фундамента как средства изучения окружающего мира для успешного освоения дисциплин естественнонаучного и профессионального циклов по профилю направления. Изучение законов, закономерностей математики и отвечающих им методов расчета. Формирование навыков построения и применения моделей, возникающих в инженерной практике и проведения расчетов по таким моделям..

### Задачи дисциплины

Формируемые у обучающегося **компетенции** и запланированные **результаты обучения** по дисциплине, соотнесенные с **индикаторами достижения компетенций**:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Запланированные результаты обучения
ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общепрофессиональные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	ИД-бОПК-1 Применяет математический аппарат вариационного исчисления, демонстрирует понимание вариационных принципов механики	знать: - Решать задачи с неподвижными границами; - Решать задачи с подвижными границами; - Знать отличие вариационных задач Лагранжа, Больца и Майера..  уметь: - Решать простейшие задачи вариационного исчисления.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ВО

Дисциплина относится к основной профессиональной образовательной программе Динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры (далее – ОПОП), направления подготовки 15.03.03 Прикладная механика, уровень образования: высшее образование - бакалавриат.

Базируется на уровне среднего общего образования.

Результаты обучения, полученные при освоении дисциплины, необходимы при выполнении выпускной квалификационной работы.

### 3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 3.1 Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы, 72 часа.

№ п/п	Разделы/темы дисциплины/формы промежуточной аттестации	Всего часов на раздел	Семестр	Распределение трудоемкости раздела (в часах) по видам учебной работы										Содержание самостоятельной работы/ методические указания
				Контактная работа							СР			
				Лек	Лаб	Пр	Консультация		ИКР		ПА	Работа в семестре	Подготовка к аттестации /контроль	
КПР	ГК	ИККП	ТК											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1 Классические задачи вариационного исчисления	20	4	6	-	6	-	-	-	-	-	8	-	<p><b><u>Подготовка к практическим занятиям:</u></b>                      Изучение материала по разделу "Классические задачи вариационного исчисления" подготовка к выполнению заданий на практических занятиях и подготовка к контрольной работе  <b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b>                      [1], с 16-40                      [2], с 22-42</p>
1.1	Функционал. Вариация функционала и ее свойства. Экстремум функционала. Вариация функционала, дифференцируемость по Фреше и Гато. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнения Эйлера.	20		6	-	6	-	-	-	-	-	8	-	
2	2 Необходимые и достаточные условия экстремумов	14		4	-	4	-	-	-	-	-	-	6	
2.1	Задачи с функционалами, зависящими от производных высших порядков. Задачи с подвижными концами и границами. Обобщение задачи с подвижными	14	4	-	4	-	-	-	-	-	-	6	-	

	границами												
3	3 Основные задачи вариационного исчисления	20	6	-	6	-	-	-	-	-	8	-	<b><u>Подготовка к практическим занятиям:</u></b> Изучение материала по разделу "Основные задачи вариационного исчисления" подготовка к выполнению заданий на практических занятиях и подготовка к контрольной работе <b><u>Изучение материалов литературных источников:</u></b> [1], с 66-80 [2], с 46-64
3.1	Элементарная задача Больца и Майера. Вариационные задачи с дифференциальными и интегральными связями. Исследование экстремалей в простейшей вариационной задаче. Условия Лежандра и Якобы. Поле экстремалей.	20	6	-	6	-	-	-	-	-	8	-	
	Зачет с оценкой	18.0	-	-	-	-	-	-	-	0.3	-	17.7	
	<b>Всего за семестр</b>	<b>72.0</b>	<b>16</b>	<b>-</b>	<b>16</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>0.3</b>	<b>22</b>	<b>17.7</b>	
	<b>Итого за семестр</b>	<b>72.0</b>	<b>16</b>	<b>-</b>	<b>16</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>0.3</b>	<b>39.7</b>		

**Примечание:** Лек – лекции; Лаб – лабораторные работы; Пр – практические занятия; КПП – аудиторные консультации по курсовым проектам/работам; ИККП – индивидуальные консультации по курсовым проектам/работам; ГК- групповые консультации по разделам дисциплины; СР – самостоятельная работа студента; ИКР – иная контактная работа; ТК – текущий контроль; ПА – промежуточная аттестация

### **3.2 Краткое содержание разделов**

#### 1. 1 Классические задачи вариационного исчисления

1.1. Функционал. Вариация функционала и ее свойства. Экстремум функционала. Вариация функционала, дифференцируемость по Фреше и Гато. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнения Эйлера.

1 Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах. Необходимое условие экстремума функционала. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Основная лемма. Частные случаи интегрируемости уравнений Эйлера. Достаточные условия экстремума функционала. Подвижные границы. Условия трансверсальности. Экстремали с угловыми точками. Задача на условный экстремум с дифференциальными и интегральными связями. Задача Больца. Некоторые классические задачи вариационного исчисления (геодезические линии, задача о брахистохроне, изопериметрические задачи). Дифференциальное исчисление в линейных нормированных пространствах. Необходимое условие экстремума функционала в линейном нормированном пространстве..

#### 2. 2 Необходимые и достаточные условия экстремумов

2.1. Задачи с функционалами, зависящими от производных высших порядков. Задачи с подвижными концами и границами. Обобщение задачи с подвижными границами

2 Уравнение Эйлера-Лагранжа. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимое условие экстремума. Основная лемма Дюбуа-Реймона. Частные случаи интегрируемости уравнений Эйлера-Лагранжа. Достаточные условия экстремума функционала. Уравнение Якоби и условие Якоби. Центральное поле экстремалей. Функция Вейерштрасса. Условие Лежандра..

#### 3. 3 Основные задачи вариационного исчисления

3.1. Элементарная задача Больца и Майера. Вариационные задачи с дифференциальными и интегральными связями. Исследование экстремалей в простейшей вариационной задаче. Условия Лежандра и Якоби. Поле экстремалей.

3 Необходимые условия экстремума для функционалов, зависящих от вектор-функции, от производных более высокого порядка, от функций нескольких переменных. Подвижные границы. Условие трансверсальности в простейшей задаче вариационного исчисления. Заданное поведение границы. Пространственные задачи. Экстремали с угловыми точками. Задачи вариационного исчисления с преломлением и отражением экстремалей. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи с голономными, дифференциальными и интегральными связями. Вариационные задачи Лагранжа, Майера и Больца. Теория оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина. Вариационные принципы механики Мопертюи-Лагранжа, стационарного действия Гамильтона. Прямые методы: Ритца, Канторовича, Эйлера, Бубнова-Галёркина и др..

### **3.3. Темы практических занятий**

1. Функционал. Вариация функционала и ее свойства.;
2. Экстремум функционала. Вариация функционала, дифференцируемость по Фреше и Гато;
3. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнения Эйлера.;
4. Задачи с функционалами, зависящими от производных высших порядков.;
5. Задачи с подвижными концами и границами;
6. Обобщение задачи с подвижными границами;
7. Элементарная задача Больца и Майера.;

8. Вариационные задачи с дифференциальными и интегральными связями;
9. Исследование экстремалей в простейшей вариационной задаче. Условия Лежандра и Якобы. Поле экстремалей..

### **3.4. Темы лабораторных работ** не предусмотрено

### **3.5 Консультации**

#### *Текущий контроль (ТК)*

1. Консультации направлены на получение индивидуального задания для выполнения контрольных мероприятий по разделу "Классические задачи вариационного исчисления"
2. Консультации направлены на получение индивидуального задания для выполнения контрольных мероприятий по разделу "Необходимые и достаточные условия экстремумов"
3. Консультации направлены на получение индивидуального задания для выполнения контрольных мероприятий по разделу "Основные задачи вариационного исчисления"

### **3.6 Тематика курсовых проектов/курсовых работ** Курсовой проект/ работа не предусмотрены

### 3.7. Соответствие разделов дисциплины и формируемых в них компетенций

Запланированные результаты обучения по дисциплине (в соответствии с разделом 1)	Коды индикаторов	Номер раздела дисциплины (в соответствии с п.3.1)			Оценочное средство (тип и наименование)
		1	2	3	
<b>Знать:</b>					
Знать отличие вариационных задач Лагранжа, Больца и Майера.	ИД-бопк-1			+	Контрольная работа/Основные задачи вариационного исчисления
Решать задачи с подвижными границами	ИД-бопк-1		+		Контрольная работа/Необходимые и достаточные условия экстремумов
Решать задачи с неподвижными границами	ИД-бопк-1		+		Контрольная работа/Необходимые и достаточные условия экстремумов
<b>Уметь:</b>					
Решать простейшие задачи вариационного исчисления	ИД-бопк-1	+			Контрольная работа/Классические задачи вариационного исчисления

## **4. КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ)**

### **4.1. Текущий контроль успеваемости**

**4 семестр**

Форма реализации: Письменная работа

1. Классические задачи вариационного исчисления (Контрольная работа)
2. Необходимые и достаточные условия экстремумов (Контрольная работа)
3. Основные задачи вариационного исчисления (Контрольная работа)

Балльно-рейтинговая структура дисциплины является приложением А.

### **4.2 Промежуточная аттестация по дисциплине**

*Зачет с оценкой (Семестр №4)*

итоговая оценка за освоение дисциплины определяется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе для студентов НИУ «МЭИ»

В диплом выставляется оценка за 4 семестр.

**Примечание:** Оценочные материалы по дисциплине приведены в фонде оценочных материалов ОПОП.

## **5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **5.1 Печатные и электронные издания:**

1. Петрушко, И. М. Курс высшей математики. Вариационное исчисление. Лекции и практические занятия : учебное пособие по курсу "Высшая математика" по всем направлениям / И. М. Петрушко, В. А. Илюшкин, Моск. энерг. ин-т (МЭИ ТУ). – М. : Изд-во МЭИ, 2006. – 171 с. – ISBN 5-903072-68-2.;
2. М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселев - "Вариационное исчисление: задачи и упражнения", Издательство: "Наука", Москва, 1973 - (191 с.)  
<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455168>.

### **5.2 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:**

1. СДО "Прометей";
2. Office / Российский пакет офисных программ;
3. Windows / Операционная система семейства Linux;
4. Видеоконференции (Майнд, Сберджаз, ВК и др).

### **5.3 Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:**

1. ЭБС Лань - <https://e.lanbook.com/>
2. ЭБС "Университетская библиотека онлайн" - [http://biblioclub.ru/index.php?page=main\\_ub\\_red](http://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red)
3. Научная электронная библиотека - <https://elibrary.ru/>
4. Электронная библиотека МЭИ (ЭБ МЭИ) - <http://elib.mpei.ru/login.php>
5. Портал открытых данных Российской Федерации - <https://data.gov.ru>

6. База открытых данных Министерства труда и социальной защиты РФ -

<https://rosmintrud.ru/opendata>

7. База открытых данных профессиональных стандартов Министерства труда и социальной защиты РФ - <http://profstandart.rosmintrud.ru/obshchiy-informatsionnyy-blok/natsionalnyy-reestr-professionalnykh-standartov/>

8. База открытых данных Министерства экономического развития РФ -

<http://www.economy.gov.ru>

9. База открытых данных Росфинмониторинга - <http://www.fedsfm.ru/opendata>

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Тип помещения	Номер аудитории, наименование	Оснащение
Учебные аудитории для проведения лекционных занятий и текущего контроля	Б-415, Учебная аудитория	кресло рабочее, стол преподавателя, стол, стул, доска меловая, мультимедийный проектор, экран, доска маркерная
Учебные аудитории для проведения практических занятий, КР и КП	Б-415, Учебная аудитория	кресло рабочее, стол преподавателя, стол, стул, доска меловая, мультимедийный проектор, экран, доска маркерная
Учебные аудитории для проведения промежуточной аттестации	Б-412, Учебная аудитория	стол преподавателя, стол, стул, доска меловая, компьютерная сеть с выходом в Интернет, мультимедийный проектор, экран, доска маркерная
Помещения для самостоятельной работы	НТБ-302, Читальный зал отдела обслуживания учебной литературой	стул, стол письменный, компьютерная сеть с выходом в Интернет, компьютер персональный
	НТБ-303, Лекционная аудитория	стол компьютерный, стул, стол письменный, вешалка для одежды, компьютерная сеть с выходом в Интернет, компьютер персональный, принтер, кондиционер
Помещения для консультирования	Б-308/1, Преподавательская каф. "ВМ"	кресло рабочее, стол, стол компьютерный, стул, шкаф, доска меловая, компьютерная сеть с выходом в Интернет, доска магнитная, компьютер персональный, холодильник, кондиционер
Помещения для хранения оборудования и учебного инвентаря	В-404/1а, Кладовая	

## БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВАЯ СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

### Основы вариационного исчисления

(название дисциплины)

#### 4 семестр

**Перечень контрольных мероприятий текущего контроля успеваемости по дисциплине:**

- КМ-1 Классические задачи вариационного исчисления (Контрольная работа)  
 КМ-2 Необходимые и достаточные условия экстремумов (Контрольная работа)  
 КМ-3 Основные задачи вариационного исчисления (Контрольная работа)

**Вид промежуточной аттестации – Зачет с оценкой.**

Номер раздела	Раздел дисциплины	Индекс КМ:	КМ-1	КМ-2	КМ-3
		Неделя КМ:	3	7	11
1	1 Классические задачи вариационного исчисления				
1.1	Функционал. Вариация функционала и ее свойства. Экстремум функционала. Вариация функционала, дифференцируемость по Фреше и Гато. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнения Эйлера.		+		
2	2 Необходимые и достаточные условия экстремумов				
2.1	Задачи с функционалами, зависящими от производных высших порядков. Задачи с подвижными концами и границами. Обобщение задачи с подвижными границами			+	
3	3 Основные задачи вариационного исчисления				
3.1	Элементарная задача Больца и Майера. Вариационные задачи с дифференциальными и интегральными связями. Исследование экстремалей в простейшей вариационной задаче. Условия Лежандра и Якобы. Поле экстремалей.				+
Вес КМ, %:			30	30	40